Matematikk eksamensklassen 2013 / 14
Oversikt over temaer / innhold

1 Regning med positive og negative tall
2 Regnerekkefølge og parenteser
3 Potenser
4 Algebra
5 Brøkregning
6 Ligninger
7 Ulikheter
8 Funksjoner
9 Måleenheter
10 Geometri
11 Sannsynlighetsregning og kombinatorikk
12 Prosentregning
13 Renter, vekstfaktor og lån
14 Omregning
15 Statistikk
16 Oddetall, partall og primtall
17 De fire regneartene

I tillegg kommer bruk av programmene Excel og GeoGebra.

1. Regning med positive og negative tall

1.1 Fortegnsregler

Når to fortegn kommer etter hverandre **uten tall mellom** gjelder denne fortegnstabellen:

Fortegn 1	Fortegn 2	Resultat
+	**+**	**+**
-	**-**	**+**
+	**-**	**-**
-	**+**	**-**

Eksempel 1: Regn ut 5 – (-3)

To minustegn etter hverandre **uten tall mellom** betyr pluss.

5 – (-3) =
5 + 3 =
8

Eksempel 2: Regn ut -5 – (-3)

-5 – (-3) =
-5 + 3 =
-2

Eksempel 3: Regn ut -5 – 3

Her er det **ikke** to minustegn etter hverandre fordi tallet 5 står mellom minustegnene.

-5 – 3 =
-8

Eksempel 4: Regn ut -5 + (-3)

-5 + (-3) =
-5 – 3 =
-8

Fortegnstabellen gjelder også når to eller flere tall ganges eller deles med hverandre.

Eksempel 5: Regn ut (-5) · (-3)

(-5) · (-3) = 15 fordi minus ganger minus gir pluss.

Eksempel 6: Regn ut (-5) · 3

(-5) · 3 = -15 fordi minus ganger pluss gir minus.

Eksempel 7: Regn ut (-15) **:** (-3)

(-15) **:** (-3) = 5 fordi minus delt på minus gir pluss.

2. Regnerekkefølge og parenteser

2.1 Regnerekkefølge og parenteser

Regnerekkefølge:

Parenteser	**( )**
Potenser	2^3
Ganging og deling	**· :**
Pluss og minus	**+ -**

Parenteser skal altså alltid regnes ut først, deretter potenser.
Så kommer ganging og deling, og til slutt pluss og minus.

Eksempel 8: Regn ut 2 + 4 · 3

Ganging kommer før pluss.

2 + 4 · 3 =
2 + 12 =
14

Eksempel 9: Regn ut 3 + 8 : 1 – 3 · 3 + 5

Ganging og deling kommer før pluss og minus.

3 + 8 : 1 – 3 · 3 + 5 =
3 + 8 - 9 + 5 =
7

Eksempel 10: Regn ut (2 + 3) · 4

Parenteser kommer før ganging.

(2 + 3) · 4 =
5 · 4 =
20

Eksempel 11: Regn ut $(2 + 3)^2$

Parenteser kommer før potenser.

$(2 + 3)^2 =$
$5^2 =$
25

Eksempel 12: Regn ut $2 \cdot 3^2$

Potenser kommer før ganging.

$2 \cdot 3^2 =$
$2 \cdot 9 =$
18

Eksempel 13: Regn ut $2 + 3^2$

Potenser kommer før pluss.

$2 + 3^2 =$
$2 + 9 =$
11

Eksempel 14: Regn ut $4 \cdot (7 - 2)^2$

Først parentes, deretter potens, til slutt ganging.

$4 \cdot (7 - 2)^2 =$
$4 \cdot 5^2 =$
$4 \cdot 25 =$
100

Eksempel 15: Regn ut $10 + (2 + 4)\,(8 - 3 \cdot 2)^2$

$10 + (2 + 4)\,(8 - 3 \cdot 2)^2 =$
$10 + 6\,(8 - 6)^2 =$
$10 + 6 \cdot 2^2 =$
$10 + 6 \cdot 4 =$
$10 + 24 =$
34

Eksempel 16: Regn ut $-2\,(4 - 6 : 2) - (-5)$

$-2\,(4 - 6 : 2) - (-5) =$
$-2\,(4 - 3) - (-5) =$
$-2 \cdot 1 - (-5) =$
$-2 + 5 =$
3

Eksempel 17: Regn ut -4 (3 + 4 : 4 – 3)

-4 (3 + 4 : 4 – 3) =
-4 (3 + 1 – 3) =
-4 (1) =
-4 · 1 =
-4

2.2 Indre parenteser

Eksempel 18: Regn ut -4 (3 + 4 : (4 – 3))

Her har vi en parentes inne i parentesen, altså en indre parentes.
Vi starter med å regne ut den indre parentesen.

-4 (3 + 4 : (4 – 3)) =
-4 (3 + 4 : 1) =
-4 (3 + 4) =
-4 · 7 =
-28

Eksempel 19: Regn ut -4 (3 - 2 (4 – 6 : 2 - 5) + 4)

-4 (3 - 2 (4 – 6 : 2 - 5) + 4) =
-4 (3 - 2 (4 – 3 – 5) + 4) =
-4 (3 - 2 (-4) + 4) =
-4 (3 + 8 + 4) =
-4 · 15 =
-60

3. Potensregning

3.1 Vanlige potenser

Eksempel 20: Regn ut 2^3

2^3 =
2 · 2 · 2 =
8

Eksempel 21: Skriv $2^4 \cdot 2^3$ som en potens

$2^4 \cdot 2^3$ =
2^{4+3} =
2^7

I eksempel 21 skulle vi skrive $2^4 \cdot 2^3$ **som en potens**.
Da trenger vi ikke regne ut 2^7.
2^7 er svaret.

Eksempel 22: Skriv $5^9 : 5^3$ som en potens

$5^9 : 5^3 =$
$5^{9-3} =$
5^6

Eksempel 23: Skriv $5^9 : 5^{-3}$ som en potens

$5^9 : 5^{-3} =$
$5^{9-(-3)} =$
$5^{9+3} =$
5^{12}

Eksempel 24: Skriv $5^2 : 5^{-4} \cdot 5^{-3} : 5^1$ som en potens

$5^2 : 5^{-4} \cdot 5^{-3} : 5^1 =$
$5^{2-(-4)+(-3)-1} =$
$5^{2+4-3-1} =$
5^2

Eksempel 25: Regn ut $5^2 : 2^{-4} \cdot 5^{-3} : 5^1 : 2^3 \cdot 5^4 \cdot 2^2$

$5^2 : 2^{-4} \cdot 5^{-3} : 5^1 : 2^3 \cdot 5^4 \cdot 2^2 =$
$5^{2-3-1+4} \cdot 2^{-(-4)-3+2} =$
$5^2 \cdot 2^3 =$
$25 \cdot 8 =$
200

I eksempel 25 skulle vi **regne ut**, derfor blir svaret 200 og ikke $5^2 \cdot 2^3$

Eksempel 26: Regn ut 3^{-2}

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Eksempel 27: Regn ut 2^{-3}

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Eksempel 28: Regn ut 5^0

Alle tall som opphøyes i 0 er lik 1

$5^0 = 1$

Eksempel 29: Regn ut $4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2$

$4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 =$
$4 \cdot 10 + 3 \cdot 100 =$
$40 + 300 =$
340

Eksempel 30: Regn ut $4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$

$4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} =$

$4 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} =$

$\frac{4}{10} + \frac{3}{100} =$

$\frac{40}{100} + \frac{3}{100} =$

$\frac{43}{100}$

Eksempel 31: Regn ut $2 - 3^{-2}$

$2 - 3^{-2} =$

$2 - \frac{1}{9} =$

$\frac{18}{9} - \frac{1}{9} =$

$\frac{17}{9}$

Eksempel 32: Regn ut $-(4 - 2^{-1}) - (5 - 3)^{-2}$

$-(4 - 2^{-1}) - (5 - 3)^{-2} =$

$-(4 - \frac{1}{2}) - 2^{-2} =$

$-(\frac{8}{2} - \frac{1}{2}) - 2^{-2} =$

$-\frac{7}{2} - \frac{1}{4} =$

$-\frac{14}{4} - \frac{1}{4} =$

$-\frac{15}{4}$

3.2 Potenser med 10 som grunntall

Eksempel 33: Regn ut $38 \cdot 10^3$

38 er ikke et desimaltall (har ikke komma).
Da kan vi gange med 10^3 ved å legge til 3 nuller.

$38 \cdot 10^3 = 38\,000$

Eksempel 34: Regn ut $38 \cdot 10^6$

Her legger vi til 6 nuller.

$38 \cdot 10^6 = 38\,000\,000$

Eksempel 35: Regn ut $0{,}0005038 \cdot 10^3$

Her har vi et tall med komma.
Da ganger vi med 10^3 ved å flytte kommaet 3 plasser til **høyre**.

$0{,}0005038 \cdot 10^3 =$
$0000{,}5038 =$
$0{,}5038$

Eksempel 36: Regn ut $0{,}0005038 \cdot 10^6$

Her flytter vi kommaet 6 plasser til **høyre**.

$0{,}0005038 \cdot 10^6 =$
$0000503{,}8 =$
$503{,}8$

Eksempel 37: Regn ut $0{,}038 \cdot 10^4$

Vi må flytte kommaet 4 plasser til **høyre**.
Da må vi først lage noen nuller til på **høyre** side av kommaet.
Det gjør ingenting om vi lager for mange nuller, de kan vi ta bort etterpå.

$0,038 \cdot 10^4 =$
$0,038000 \cdot 10^4 =$
$00380,00 =$
380

Eksempel 38: Regn ut $45\,000 \cdot 10^{-4}$

Her skal vi gange med 10^{-4}.
Da skal vi flytte kommaet 4 plasser til **venstre**.

$45\,000 \cdot 10^{-4} =$
$45\,000,0 \cdot 10^{-4} =$
$4,50000 =$
$4,5$

Eksempel 39: Regn ut $45 \cdot 10^{-4}$

Vi skal flytte kommaet 4 plasser til **venstre**.
Vi må her lage noen nuller til på **venstre** side av kommaet.

$45 \cdot 10^{-4} =$
$45,0 \cdot 10^{-4} =$
$00045,0 \cdot 10^{-4} =$
$0,00450 =$
$0,0045$

3.3 Tall på standardform

Eksempel 40: Skriv tallet 56 400 på standardform.

$56\,400 = 5.64 \cdot 10^4$

Eksempel 41: Skriv tallet 604 000 på standardform.

$604\,000 = 6,04 \cdot 10^5$

Eksempel 42: Skriv tallet 0,0037 på standardform.

$0,0037 = 3,7 \cdot 10^{-3}$

Eksempel 43: Skriv tallet 0,0002037 på standardform.

$0,0002037 = 2,037 \cdot 10^{-4}$

Eksempel 44: Skriv $2\,000 \cdot 6 \cdot 10^{11}$ på standardform

$2\,000 \cdot 6 \cdot 10^{11} =$
$12\,000 \cdot 10^{11} =$
$1{,}2 \cdot 10^{4} \cdot 10^{11} =$
$1{,}2 \cdot 10^{4+11} =$
$1{,}2 \cdot 10^{15}$

Eksempel 45: Skriv $55\,000 \cdot 6 \cdot 10^{-11}$ på standardform

$55\,000 \cdot 6 \cdot 10^{-11} =$
$330\,000 \cdot 10^{-11} =$
$3{,}3 \cdot 10^{5} \cdot 10^{-11} =$
$3{,}3 \cdot 10^{5-11} =$
$3{,}3 \cdot 10^{-6}$

4. Algebra

4.1 Innsetting av tallverdier i bokstavuttrykk

Eksempel 46: Sett inn a = 2 og regn ut verdien til uttrykket $4a – 3$

$4a - 3 =$
$4 \cdot 2 - 3 =$
$8 - 3 =$
5

Eksempel 47: Sett inn a = 5 og regn ut verdien til uttrykket $4\,(a - 2)^2$

$4\,(a - 2)^2 =$
$4 \cdot (5 - 2)^2 =$
$4 \cdot 3^2 =$
$4 \cdot 9 =$
36

4.2 Regning med bokstavuttrykk

Eksempel 48: Regn ut $2a + a – 7a$

$2a + a - 7a =$
$2a + 1a - 7a =$
$-4a$

Eksempel 49: Regn ut $2a + 5b – 4a + 2b$

$2a + 5b - 4a + 2b =$
$2a - 4a + 5b + 2b =$
$-2a + 7b$

Eksempel 50: Regn ut $2a \cdot 3a$

$2a \cdot 3a =$
$6a^2$

Eksempel 51: Regn ut $2a \cdot 3b$

$2a \cdot 3b =$
$6ab$

Eksempel 52: Regn ut $a^2 \cdot a^3$

$a^2 \cdot a^3 =$
$a^{2+3} = a^5$

Eksempel 53: Regn ut $a^8 : a^2$

$a^8 : a^2 =$
$a^{8-2} = a^6$

Eksempel 54: Regn ut $a^8 : a^{-2}$

$a^8 : a^{-2} =$
$a^{8-(-2)} =$
$a^{8+2} =$
a^{10}

Eksempel 55: Regn ut $a^5 \cdot a^{-6} : a^{-4} \cdot a^3 : a^2$

$a^5 \cdot a^{-6} : a^{-4} \cdot a^3 : a^2 =$
$a^{5-6-(-4)+3-2} =$
$a^{5-6+4+3-2} =$
a^4

Eksempel 56: Regn ut $2\ (4a + 3b - 5c)$

$2\ (4a + 3b - 5c) =$
$8a + 6b - 10c$

Eksempel 57: Regn ut $-2\ (4a + 3b - 5c)$

$-2\ (4a + 3b - 5c) =$
$-8a - 6b + 10c$

Eksempel 58: Regn ut $-\ (5 + 2a - 4b)$

$-\ (5 + 2a - 4b) =$
$-5 - 2a + 4b$

Eksempel 59: Regn ut $(4b - 3)\ (3w + 2a)$

$(4b - 3)(3w + 2a) =$
$12bw + 8ba – 9w – 6a$

Eksempel 60: Regn ut $-3b(a – 2b)(a + b)$

$-3b(a – 2b)(a + b) =$
$-3b(a^2 + ab – 2ba – 2b^2) =$
$-3ba^2 – 3b^2a + 6b^2a + 6b^3 =$
$-3ba^2 + 3b^2a + 6b^3$

Eksempel 61: Regn ut $3 – 2(b + 4(a – 2b) + 3)$

$3 – 2(b + 4(a – 2b) + 3) =$
$3 – 2(b + 4a – 8b + 3) =$
$3 – 2(-7b + 4a + 3) =$
$3 + 14b – 8a – 6 =$
$-3 + 14b – 8a$

4.3 Faktorisering

Eksempel 62: Faktoriser $6b + 4$

$6b + 4 =$
$3\cdot\underline{2}\cdot b + \underline{2}\cdot 2 =$
$2(3b + 2)$

Eksempel 63: Faktoriser $6b^2 + 5b$

$6b^2 + 5b =$
$2\cdot 3\cdot\underline{b}\cdot b + 5\cdot\underline{b} =$
$b(6b + 5)$

Eksempel 64: Faktoriser $15b^2 + 6b$

$15b^2 + 6b =$
$\underline{3}\cdot 5\cdot\underline{b}\cdot b + 2\cdot\underline{3}\cdot\underline{b} =$
$3b(5b + 2)$

Eksempel 65: Faktoriser $4ab + 12a^2 + 2a$

$4ab + 12a^2 + 2a =$
$\underline{2}\cdot 2\cdot\underline{a}\cdot b + \underline{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\underline{a}\cdot a + \underline{2}\cdot\underline{a} =$
$2a(2b + 6a + 1)$

Eksempel 66: Faktoriser $4a^5 + 12a^7 + 2a^4$

$4a^5 + 12a^7 + 2a^4 =$
$a^4(4a^1 + 12a^3 + 2) =$ (Vi setter først a^4 utenfor parentesen)
$2a^4(2a^1 + 6a^3 + 1)$

4.4 Sette opp bokstavuttrykk som beskriver praktiske situasjoner

Eksempel 67:
En butikk selger epler for 20 kr pr kg og appelsiner for 15 kr pr kg.
Butikken kjøper inn epler for 12 kr pr kg og appelsiner for 9 kr pr kg.
Finn butikkens inntekt, utgifter og resultat dersom butikken selger E kg epler og A kg appelsiner.

Inntekt = E · 20 + A · 15 = 20 E + 15 A
Utgifter = E · 12 + A · 9 = 12 E + 9 A
Resultat = Inntekt – utgifter =
20 E + 15 A – (12 E + 9 A) =
20 E + 15 A – 12 E – 9 A
= 8 E + 6 A

5. Brøk

5.1 Legge sammen og trekke fra brøker

Eksempel 68: Regn ut $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$

Hvis det er + eller - mellom brøker må vi finne felles nevner.
Her er det + mellom brøkene, så vi finner felles nevner.

4 = 2·2
6 = 2·3
FN = 2·2·3 = 12

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$$

Eksempel 69: Regn ut $\frac{3x}{4a}-\frac{x-1}{6b}$

Det er – mellom brøkene, så vi må finne felles nevner.

4a = 2·2·a
6b = 2·3·b
FN = 2·2·a·3·b = 12ab

$$\frac{3x}{4a}-\frac{x-1}{6b}=\frac{3x\cdot 3b}{4a\cdot 3b}-\frac{(x-1)\cdot 2a}{6b\cdot 2a}=\frac{9xb-(x-1)\cdot 2a}{12ab}=\frac{9xb-2ax+2a}{12ab}$$

5.2 Gange og dele brøker med hverandre

Eksempel 70: Regn ut $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}$

Vi trenger ikke finne felles nevner hvis vi skal gange eller dele brøker med hverandre.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Eksempel 71: Regn ut $\frac{3x}{4a} \cdot \frac{x-1}{6b}$

$$\frac{3x}{4a} \cdot \frac{x-1}{6b} = \frac{3x \cdot (x-1)}{4a \cdot 6b} = \frac{3x^2 - 3x}{24ab} = \frac{3(x^2 - x)}{3 \cdot 8ab} = \frac{(x^2 - x)}{8ab}$$

Eksempel 72: Regn ut $\frac{3}{4} : \frac{1}{6}$

Når vi skal dele to brøker med hverandre snur vi den siste brøken og forandrer til gangetegn.

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{1} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 1} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Eksempel 73: Regn ut $\frac{3x}{4a} : \frac{x-1}{6b}$

$$\frac{3x}{4a} : \frac{x-1}{6b} = \frac{3x}{4a} \cdot \frac{6b}{x-1} = \frac{18xb}{4a\,(x-1)} = \frac{18xb}{4ax-4a} = \frac{9xb}{2ax-2a}$$

5.3 Forkorte brøker

Eksempel 74: Forkort brøken $\frac{15}{6}$

Når vi skal forkorte en brøk faktoriserer vi først tallene i brøken for å se om de har noe felles (likt).

$$\frac{15}{6} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

15 og 6 har 3 som felles faktor, derfor kunne vi forkorte med 3 i denne brøken.

Eksempel 75: Forkort brøken $\frac{8ax}{6x}$

$$\frac{8ax}{6x} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot x}{2 \cdot 3 \cdot x} = \frac{4a}{3}$$

Tallene 8ax og 6x har 2x som felles faktor, så vi kunne forkorte med 2x i denne brøken.

Eksempel 76: Forkort brøken $\frac{6a+5}{4}$

$$\frac{6a+5}{4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot a + 5}{2 \cdot 2}$$

Vi ser at 2 finnes i både 6a og 4, men ikke i 5.
Det er ingenting som er felles for både 6a, 5 og 4.
Vi kan ikke forkorte denne brøken.

Eksempel 77: Forkort brøken $\frac{9ab+12cb}{6b}$

$$\frac{9ab+12cb}{6b} = \frac{3 \cdot 3 \cdot a \cdot b + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c \cdot b}{2 \cdot 3 \cdot b} = \frac{3a+4c}{2}$$

Eksempel 78: Forkort brøken $\frac{6a^8 + 12a^5 + 9a^4}{6a^6}$

$$\frac{6a^8 + 12a^5 + 9a^4}{6a^6} = \frac{6a^4 + 12a^1 + 9}{6a^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot a^4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a + 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot a^2} = \frac{2a^4 + 4a^1 + 3}{2a^2}$$

Eksempel 79: Forkort brøken $\frac{4a^6c^3}{6c^5a^2}$

$$\frac{4a^6c^3}{6c^5a^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot a^6c^3}{2 \cdot 3 \cdot c^5a^2}$$

$$\frac{2a^6c^3}{3c^5a^2} =$$

$$\frac{2a^4}{3c^2}$$

Eksempel 80: Forkort brøken $\frac{10x^2 - 4x}{15x-6}$

$$\frac{10x^2 - 4x}{15x-6} = \frac{2 \cdot 5 \cdot x \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot x}{3 \cdot 5 \cdot x - 2 \cdot 3} = \frac{2x\,(5x-2)}{3\,(5x-2)} = \frac{2x}{3}$$

5.4 Blandede tall

$2\frac{3}{4}$ er et blandet tall. Vi kan gjøre det om til brøk slik:

$$2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

Eksempel 81: Regn ut $2\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4}$

$$2\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3 + 2}{3} - \frac{1 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{8}{3} - \frac{7}{4} = \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot 4} - \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{32}{12} - \frac{21}{12} = \frac{11}{12}$$

Eksempel 82: Regn ut $3 : 2\frac{1}{4}$

$$3 : 2\frac{1}{4} = \frac{3}{1} : \frac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{3}{1} : \frac{9}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

6. Ligninger

6.1 Ligninger med en ukjent

I en ligning har vi alltid to sider, venstre og høyre side.
Mellom venstre og høyre side står det alltid et likhetstegn.

Når vi skal løse ligninger har vi en eller flere ukjente størrelser som vi skal finne verdien til.
Vi skal finne den eller de verdiene som gjør at venstre side i ligningen er lik høyre side.

Eksempel 83: Løs ligningen $x + 2 = 7$.

Her er x et ukjent tall.
Vi skal finne den verdien for x som gjør at venstre side av ligningen er lik høyre side.
Vi ønsker å finne x, derfor vil vi at x skal stå alene på den ene siden av ligningen.

Derfor flytter vi leddet + 2 over til den andre siden av likhetstegnet.
Da må vi forandre fortegnet til dette leddet.

Vi får da at $x = 7 – 2$.
Vi ser at +2 er flyttet over til høyre side og at +2 derfor er blitt forandret til -2.
Nå står x alene, og vi ser at $x = 5$.

Vi har nå løst ligningen, og svaret er at $x = 5$.

Eksempel 84: Løs ligningen $5x – 4 – 2x – 3 = -4x + 5 + x$

Her har vi mange ledd i ligningen, noen på venstre side og noen på høyre side.
Da samler vi først alle leddene med x på den ene siden, for eksempel venstre side.
Samtidig samler vi alle leddene uten x på den andre siden.

Da vil ligningen se slik ut: 5x – 2x + 4x – x = 5 + 4 + 3
Nå regner vi sammen på hver side: 6x = 12
Vi vil ha x helt alene på venstre side.
Vi kan da dele med 6, men vi må gjøre det både på venstre og høyre side.

Vi får nå at $\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$, som betyr at x = 2.

Vi har nå løst ligningen. Svaret er at x = 2.

Eksempel 85: Løs ligningen 5x – 2x – 3 = 3x + 10

Vi får at 5x – 2x – 3x = 10 + 3, som gir at 0x = 13.

0x er alltid lik 0, så 0x kan ikke være lik 13 uansett hva x er lik.
Det betyr at **denne ligningen ikke har noen løsning**.

Eksempel 86: Løs ligningen 5x – 2x – 3 = 3x - 3

Her får vi at 5x – 2x – 3x = -3 + 3, som gir at 0x = 0.
0x er alltid lik 0, så her vil venstre side være lik høyre side uansett hva x er lik.
Det betyr at **alle verdier av x er løsninger på denne ligningen.**

Eksempel 87: Løs ligningen - $\frac{1}{3}$ - $\frac{x}{6}$ = 2 + $\frac{x+2}{3}$

Her har vi en ligning med brøker og tall.
Først skriver vi alle ledd som brøker.

Da får vi at - $\frac{1}{3}$ - $\frac{x}{6} = \frac{2}{1} + \frac{x+2}{3}$

Fellesnevneren (FN) til brøkene er lik 6.
Vi forandrer da alle leddene slik at vi får 6 i nevneren.

$$-\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{x \cdot 1}{6 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 6} + \frac{(x+2) \cdot 2}{3 \cdot 2}$$

$$-\frac{2}{6} - \frac{x}{6} = \frac{12}{6} + \frac{2x+4}{6}$$

Nå ganger vi alle leddene med 6 slik at nevnerne forsvinner:

-2 – x = 12 + 2x + 4
-x – 2x = 12 + 4 + 2
-3x = 18

Vi deler nå med -3 på hver side:

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{18}{-3}$$

x = -6

Løsning og svar er altså at x = -6

Eksempel 88: Løs ligningen 4 - $\frac{x+2}{2}$ = 2x - $\frac{1}{3}$

Her har vi en ny ligning med brøker og tall.
Først skriver vi alle ledd som brøker.

Da får vi at $\frac{4}{1} - \frac{x+2}{2} = \frac{2x}{1} - \frac{1}{3}$

Fellesnevneren (FN) til brøkene er lik 6.
Vi forandrer da alle leddene slik at vi får 6 i nevneren.

$$\frac{4 \cdot 6}{1 \cdot 6} - \frac{(x+2) \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{2x \cdot 6}{1 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{24}{6} - \frac{(x+2) \cdot 3}{6} = \frac{12x}{6} - \frac{2}{6}$$

Nå ganger vi alle leddene med 6 slik at nevnerne forsvinner:

24 – (x + 2) · 3 = 12x – 2
24 – (3x + 6) = 12x – 2
24 – 3x – 6 = 12x – 2
-3x – 12x = - 2 – 24 + 6
- 15x = - 20

Vi deler nå med -15 på hver side:

$$\frac{-15\,x}{-15} = \frac{-20}{-15}$$

Vi forkorter brøken og får at x = $\frac{4}{3}$

Eksempel 89: Løs ligningen $\frac{3}{x} : \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$

Vi snur først brøken $\frac{4}{5}$ og setter inn gangetegn:

$$\frac{3}{x} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{10}$$

Vi ganger sammen de to første brøkene og får at $\frac{15}{4x} = \frac{1}{10}$

Vi finner felles nevner: $\frac{15 \cdot 5}{4x \cdot 5} = \frac{1 \cdot 2x}{10 \cdot 2x}$ som betyr at 75 = 2x

Da er x = $\frac{75}{2}$

6.2 Ligninger med 2 ukjente

Eksempel 90: Løs ligningssettet
3x – 2y = 16
4y + x = -4

Vi får x helt alene i den nederste ligningen ved å flytte 4y over på høyre side:

3x – 2y = 16
x = -4 – 4y

x betyr det samme som -4 – 4y. **Vi kan da ta bort x og sette inn -4 – 4y.**

3 (-4 – 4y) – 2y = 16
-12 – 12y – 2y = 16
-14y = 16 + 12
-14y = 28, som betyr at y = -2. Nå finner vi x:

x = -4 – 4y.
x = -4 – 4 · (-2) = -4 + 8 = 4

Svar er da at x = 4 og y = -2.

Eksempel 91: Jan er 16 år eldre enn Per. Til sammen er de 70 år.
Bruk ligninger med 2 ukjente til å regne ut hvor gamle hver av dem er.

Vi setter J = Jans alder og P = Pers alder.

Jan er 16 år eldre enn Per, det betyr at J = P + 16.
De er 70 år til sammen, og det betyr at J + P = 70.

Vi har nå laget 2 ligninger som vi kan bruke til å finne hvor gamle Jan og Per er.
Vi tar bort J og setter inn P + 16 i den nederste ligningen:

(P + 16) + P = 70
P + P = 70 – 16
2P = 54
P = 27
Nå kan vi også finne J:
J = P + 16
J = 27 + 16
J = 43

Svar: Per er 27 år og Jan er 43 år.

Eksempel 92: Jan får 100 kr i timelønn om dagen og 150 kr i timelønn om kvelden.
Jan har til sammen jobbet 23 timer i løpet av en uke, og til sammen har han fått 3 100 kr i lønn. Bruk ligninger med 2 ukjente til å finne ut hvor mange timer Jan har jobbet om dagen og hvor mange timer han har jobbet om kvelden.

Vi setter D = Antall timer Jan har jobbet om dagen
K = Antall timer Jan har jobbet om kvelden

Jan har jobbet 23 timer til sammen, det betyr at $D + K = 23$.

Jans lønn er lik 100 D + 150 K.
Siden Jan har fått 3 100 kr i lønn har vi at $100\,D + 150\,K = 3\,100$.

Vi setter D alene: $D = 23 - K$
Vi tar bort D og setter inn 23 – K i den andre ligningen:

$100\,(23 - K) + 150\,K = 3\,100$
$2\,300 - 100\,K + 150\,K = 3\,100$
$-100\,K + 150\,K = 3\,100 - 2\,300$
$50\,K = 800$
$K = 16$

Da kan vi også finne D:
$D = 23 - K$
$D = 23 - 16$
$D = 7$

Svar: Jan har jobbet 16 timer om kvelden og 7 timer om dagen.

7. Ulikheter

7.1 Ulikheter

Ulikheter har en venstre og en høyre side akkurat som ligninger, men vi har ikke likhetstegn mellom venstre og høyre side. I stedet har vi tegnet ”<” eller ”>”.

Tegnet ”<” betyr ”Mindre enn”.
Tegnet ”>” betyr ”Større enn”.

4 er mindre enn 5, derfor kan vi skrive at $4 < 5$.
10 er større enn 8, derfor skriver vi at $10 > 8$.

Når vi løser en ulikhet gjør vi stort sett det samme som når vi løser en ligning.
Likevel skal vi se at det er forskjell på å løse ligninger og ulikheter.

Eksempel 93: Løs ulikheten $5x + 2 < 12$.

Her skal vi finne alle verdier av x som gjør at $5x + 2$ er mindre enn 12.
Vi samler bokstaver på den ene siden og tall på den andre siden (akkurat som med ligninger).

Vi får at 5x < 12 – 2.
Det gir at 5x < 10.

Nå deler vi med 5 på begge sider, og vi får at x < 2.
Svar er altså at x < 2.

Eksempel 94: Løs ulikheten -5x + 2 < 12.

Vi får at -5x < 12 – 2, altså at -5x < 10.
Vi må dele med -5 på begge sider av ulikheten.
-5 er et negativt tall.
Når vi deler eller ganger med et negativt tall i en ulikhet må vi snu ulikhetstegnet.

Vi får da at $\frac{-5x}{-5} > \frac{10}{-5}$ som betyr at x > -2.
Svar er altså at x > -2.

Hvorfor må vi snu ulikhetstegnet når vi deler eller ganger med et negativt tall?

Vi har at 7 > 6.
Men hvis vi ganger eller deler med -1 på hver side får vi -7 og -6, og vi vet jo at -7 < -6.
Vi ser da at vi må snu ulikhetstegnet når vi ganger eller deler med -1, og det samme gjelder for alle andre negative tall.

Løsning av ulikheter gjøres ellers på samme måte som løsning av ligninger.

8. Funksjoner

8.1 Lage verditabeller og grafer, lese av grafer

En funksjon kan vi vanligvis se på som en formel der vi putter inn et tall og får ut et annet tall.

Eksempel 95: Lag verditabell og graf til f(x) = 20x – 300 ved å sette inn x-verdiene -20, -10, 0, 10, 20 og 30 i funksjonsuttrykket.

Vi setter inn de ulike verdiene for x:

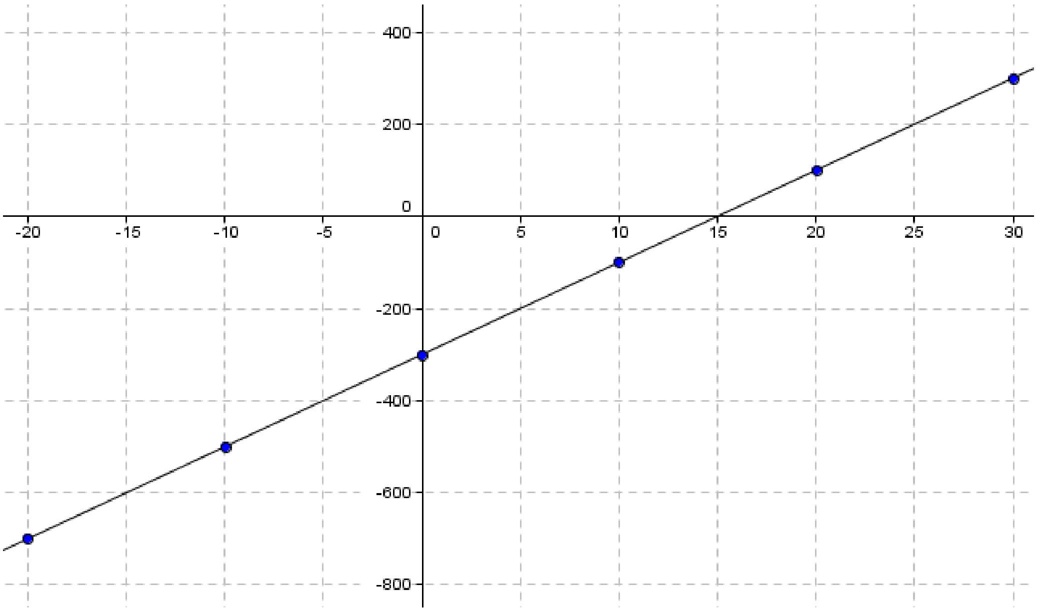
f(-20) = 20 · (-20) – 300 = -400 – 300 = -700
f(-10) = 20 · (-10) – 300 = -200 – 300 = -500
f(0) = 20 · 0 – 300 = 0 – 300 = -300
f(10) = 20 · 10 – 300 = 200 – 300 = -100
f(20) = 20 · 20 – 300 = 400 – 300 = 100
f(30) = 20 · 30 – 300 = 600 – 300 = 300

Da får vi denne verditabellen:

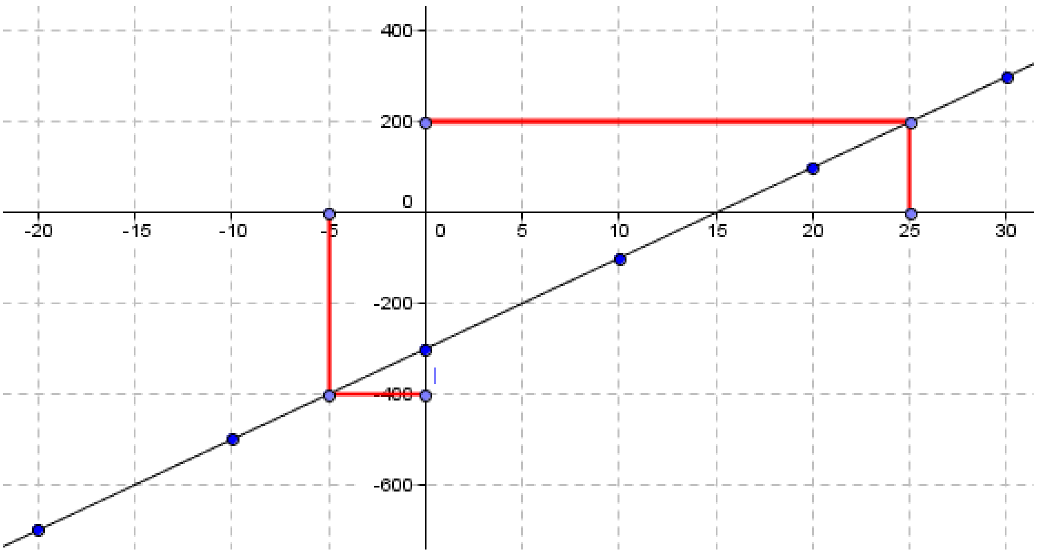
x	f(x)
-20	-700
-10	-500

0	-300
10	-100
20	100
30	300

Nå lager vi grafen til f(x):



Eksempel 96: Bruk grafen i eksempel 94 til å finne f(-5) og f(25).



Vi finner x = -5 og går nedover til vi treffer grafen. Deretter går vi inn til aksen til f(x).
Vi ser da ut fra grafen at f(-5) = -400.
Vi finner nå x = 25 og går oppover til vi treffer grafen. Deretter går vi inn til grafen til f(x).
Vi ser her at f(25) = 200.

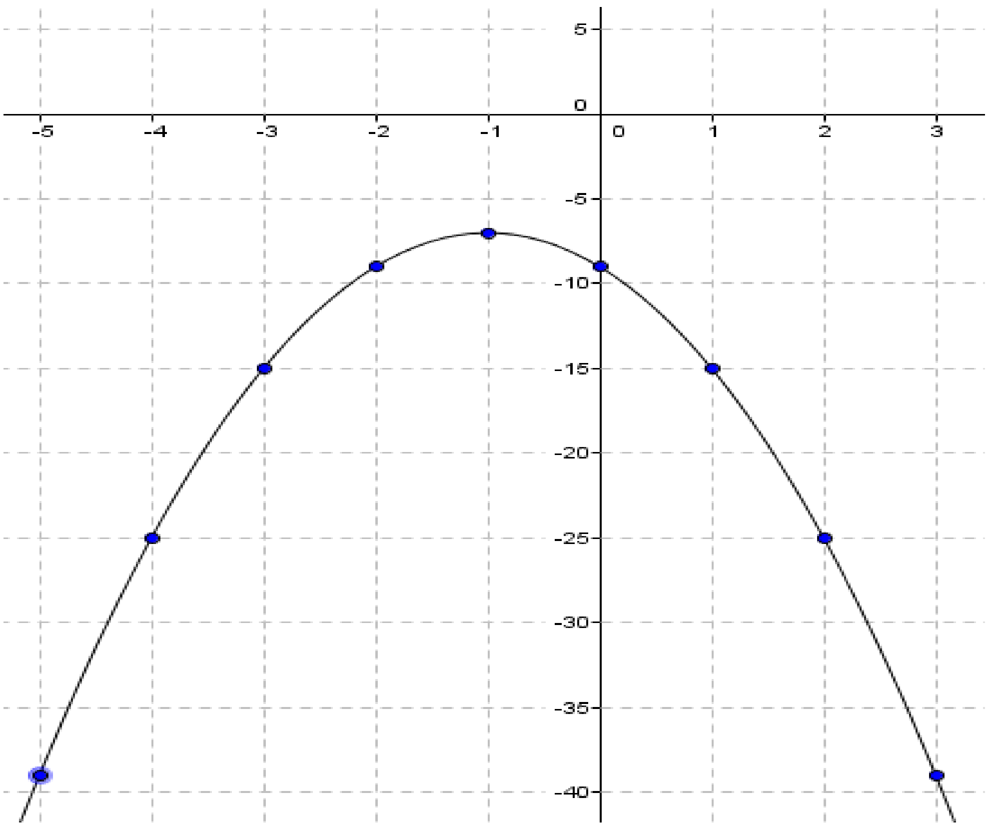
Eksempel 97: Lag verditabell og graf til $f(x) = -2x^2 - 4x – 9$.

Når vi har x^2 i funksjonsuttrykket blir ikke grafen en rett linje.
Da er det viktig at vi velger riktige verdier for x i verditabellen.

Vi glemmer først -9 på slutten av uttrykket, og skriver at $-2x^2 - 4x = -2x\ (x + 2)$.

-2x er lik null 0 når x = 0, mens (x + 2) er lik null når x = -2.
Mellom 0 og -2 har vi x = -1. Da skal x = -1 stå midt i verditabellen.
Da får vi denne verditabellen:

x	f(x)	Utregning
-5	-39	$-2\ (-5)^2 - 4\ (-5) – 9 = -2 \cdot 25 + 20 – 9 = -50 + 20 – 9 = -39$
-4	-25	$-2\ (-4)^2 - 4\ (-4) – 9 = -2 \cdot 16 + 16 – 9 = -32 + 16 – 9 = -25$
-3	-15	$-2\ (-3)^2 - 4\ (-3) – 9 = -2 \cdot 9 + 12 – 9 = -18 + 12 – 9 = -15$
-2	-9	$-2\ (-2)^2 - 4\ (-2) – 9 = -2 \cdot 4 + 8 – 9 = -8 + 8 – 9 = -9$
-1	-7	$-2\ (-1)^2 - 4\ (-1) – 9 = -2 \cdot 1 + 4 – 9 = -2 + 4 – 9 = -7$
0	-9	$-2\ (0)^2 - 4\ (0) – 9 = -2 \cdot 0 - 0 – 9 = 0 - 0 – 9 = -9$
1	-15	$-2\ (1)^2 - 4\ (1) – 9 = -2 \cdot 1 - 4 – 9 = -2 - 4 – 9 = -15$
2	-25	$-2\ (2)^2 - 4\ (2) – 9 = -2 \cdot 4 - 8 – 9 = -8 - 8 – 9 = -25$
3	-39	$-2\ (3)^2 - 4\ (3) – 9 = -2 \cdot 9 - 12 – 9 = -18 - 12 – 9 = -39$



8.2 Lage og forstå funksjonsuttrykk og grafer ut fra gitt tekst / sammenheng

Eksempel 98: Per er bilselger og kan velge mellom 3 ulike jobber.

I jobb 1 får han 32 000 kr pr måned uansett hvor mange biler han selger.
I jobb 2 får han 12 000 kr pr måned + 800 kr pr bil han selger.
I jobb 3 får han ingenting fast, men 1 200 kr for hver bil han selger.

a) Lag funksjonsuttrykk som viser hvor mye Per tjener per måned i jobb 1, 2 og 3.

Vi lar $f_1\ (x)$ være inntekt per måned i jobb 1 hvis Per selger x biler.

Vi lar f_2 (x) være inntekt per måned i jobb 2 hvis Per selger x biler.
Vi lar f_3 (x) være inntekt per måned i jobb 3 hvis Per selger x biler.

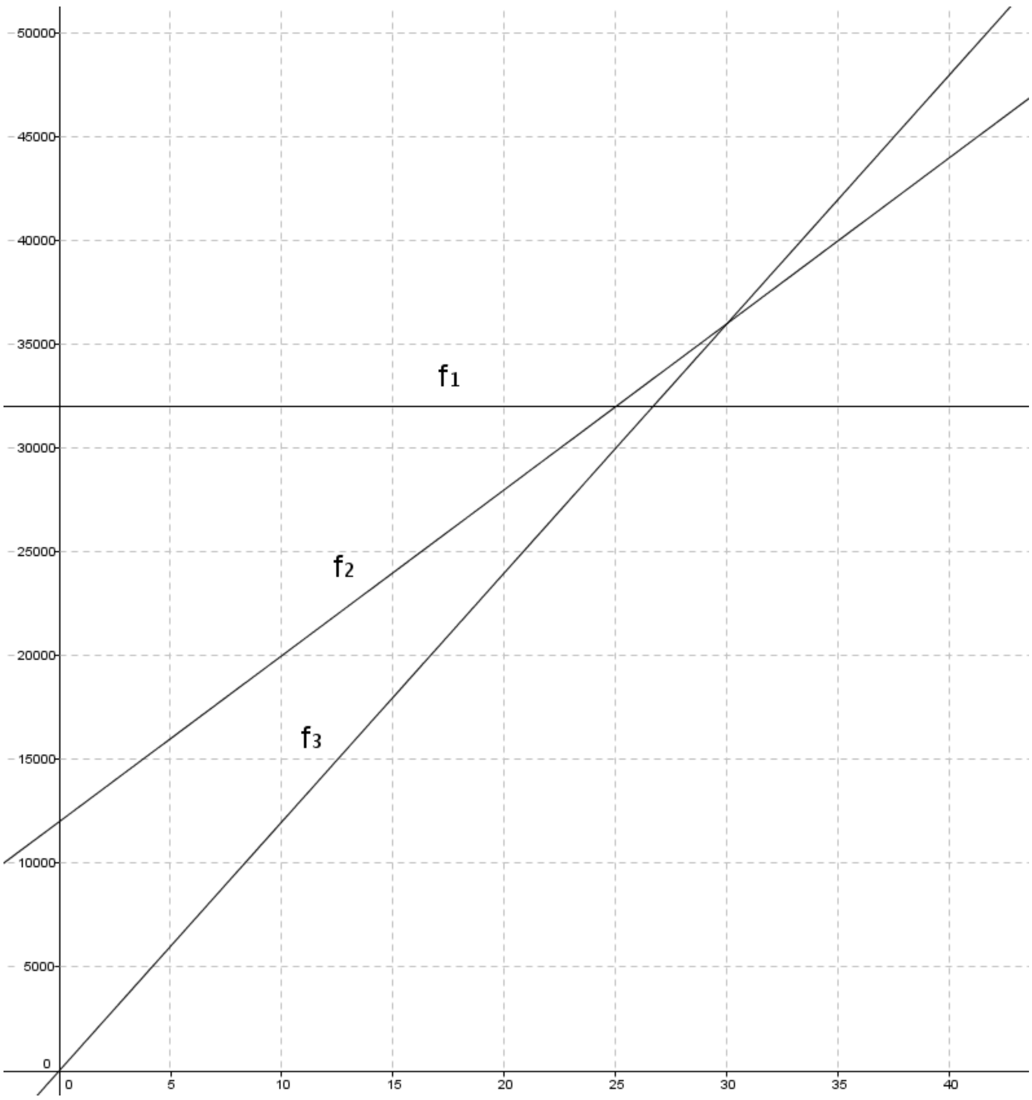
Vi får da:

f_1 (x) = 32 000
f_2 (x) = 12 000 + 800x
f_3 (x) = 1 200x

b) Lag en verditabell for de 3 funksjonene der x = 0, 5, 10, 20, 30 og 40.

	0	5	10	20	30	40
f_1	32000	32000	32000	32000	32000	32000
f_2	12000	16000	20000	28000	36000	44000
f_3	0	6000	12000	24000	36000	48000

c) Tegn grafene til funksjonene i samme koordinatsystem.



d) Når er jobb 1, 2 og 3 best for Per?

Vi ser av grafene:

Jobb 1 er best for Per hvis han selger mindre enn 25 biler per måned.
Jobb 2 er best hvis han selger mellom 25 og 30 biler.
Jobb 3 er best hvis han selger mer enn 30 biler per måned.

Eksempel 99: Lønnsomhetsberegninger for en kiosk

Hanne eier en pølsekiosk og vil lage en oversikt og en grafisk fremstilling av lønnsomheten til kiosken. Hun vil finne ut hvor mange pølser hun må selge pr dag for å få den fortjenesten hun ønsker. Kiosken er åpen 300 dager pr år.

Utgifter:

540 000 kr pr år i faste utgifter som blant annet leie, strøm, forsikring og lønnsutgifter.
I tillegg kommer 7 kr pr pølse som selges.

Inntekter: 22 kr pr pølse som selges.

a) Regn ut årlig fortjeneste for kiosken når det selges x pølser pr dag.

Fortjeneste = Inntekter – utgifter.

Vi skal først beregne årlige utgifter.
For hver pølse som selges er det utgifter på 7 kr.
Ved et salg på x pølser pr dag blir disse utgiftene lik $x \cdot 7 = 7x$.
Pr år blir dette lik $7x \cdot 300 = 2\,100\,x$.
I tillegg kommer de faste utgiftene på 540 000 kr.

Det betyr at årlige utgifter = 540 000 + 2 100 x.

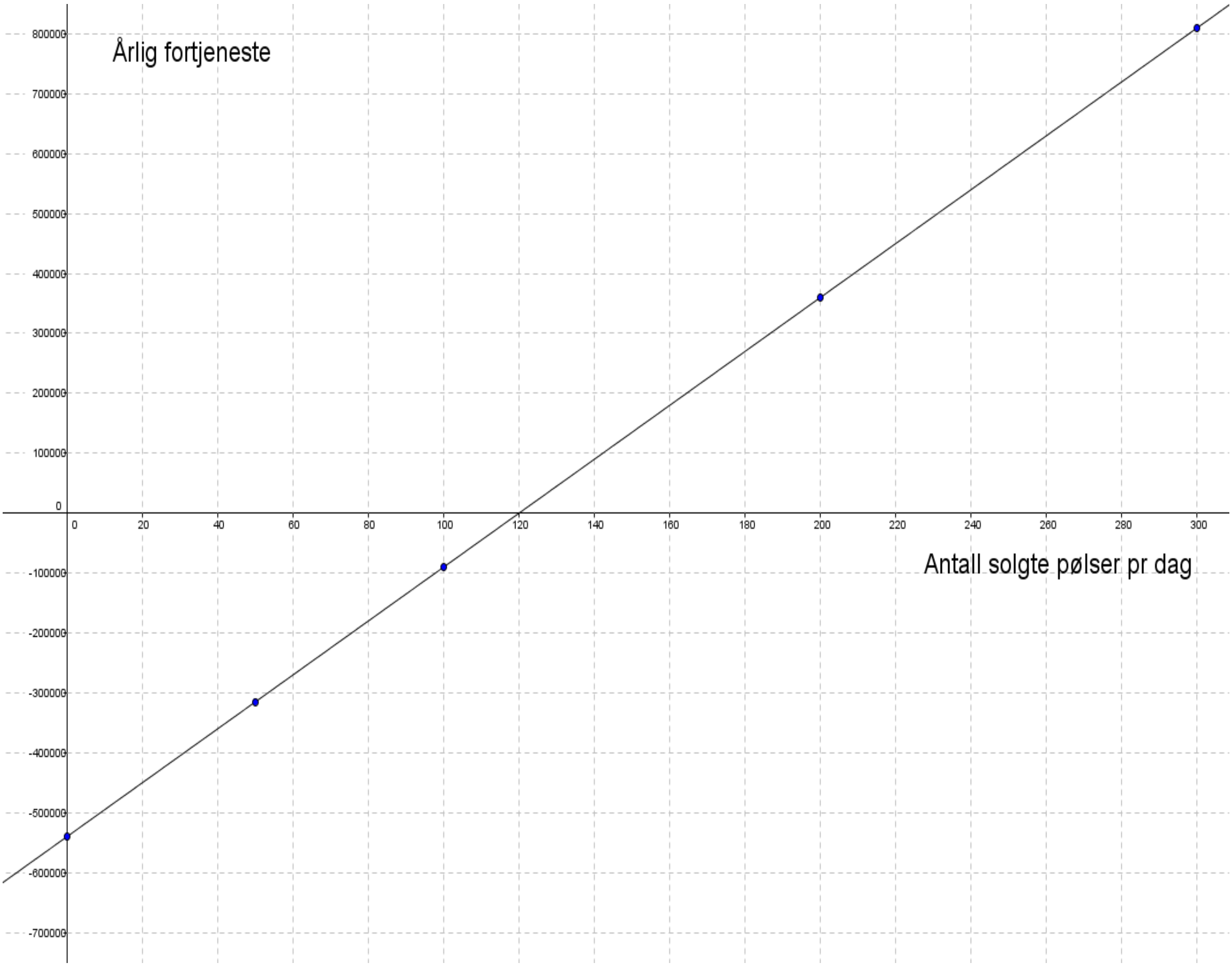
Vi regner nå ut årlige inntekter.
For hver pølse som selges er det inntekt på 22 kr.
Ved et salg på x pølser pr dag blir disse inntektene lik $x \cdot 22 = 22x$.
Pr år blir dette lik $22x \cdot 300 = 6\,600\,x$.

Det betyr at årlige inntekter = 6 600 x.

Årlig fortjeneste =
Inntekter – utgifter =
6 600x – (540 000 + 2 100x) =
6 600x – 540 000 – 2 100x **= 4 500x – 540 000**.

b) La F(x) = årlig fortjeneste ved salg av x pølser daglig.
Lag verditabell for F når x = 0, 50, 100, 200 og 300.
Tegn også grafen til F.

x	F(x)
0	-540 000
50	-315 000
100	-90 000
200	360 000
300	810 000



c) Hvor mange pølser må det selges pr dag for at kiosken skal gå i overskudd?

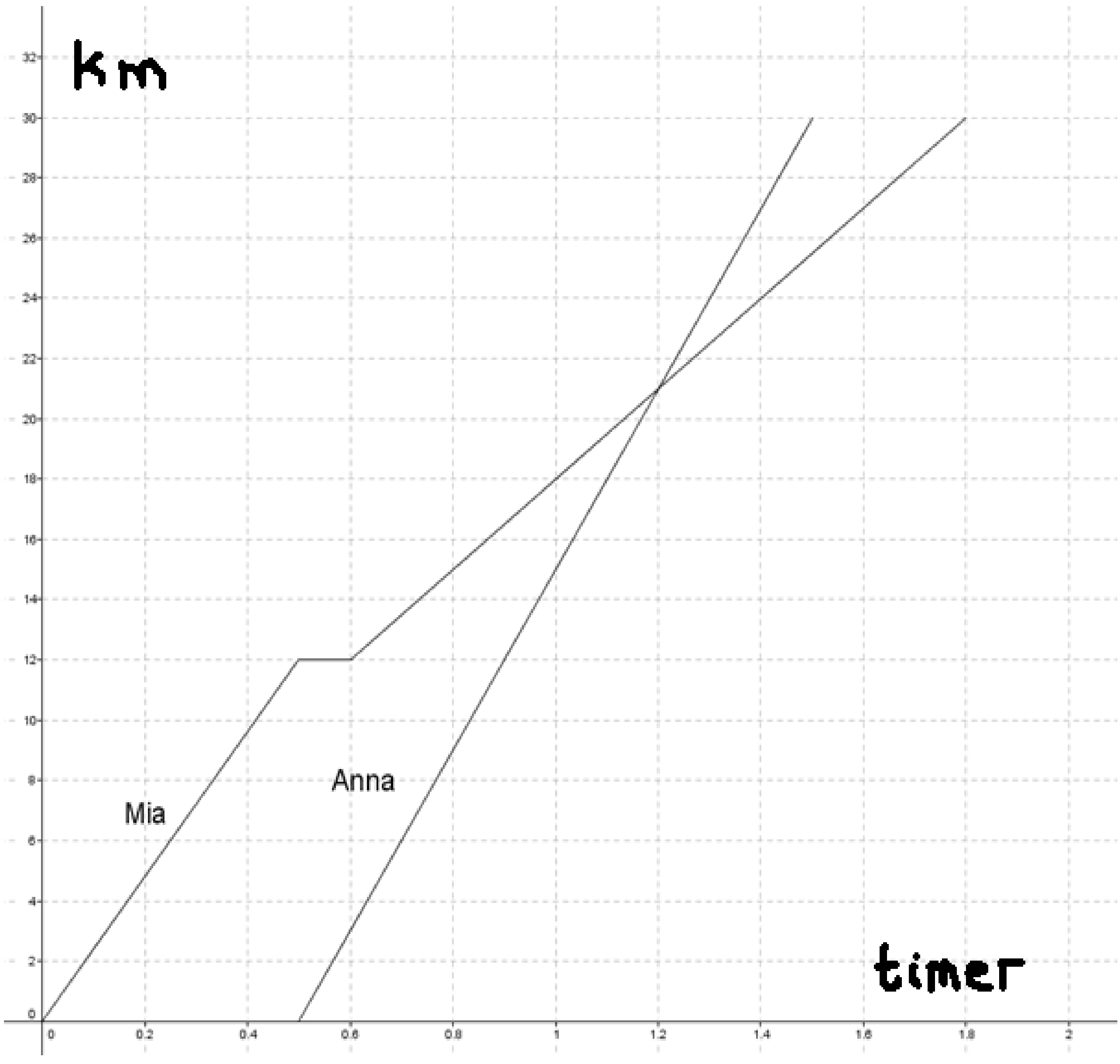
Kiosken går i overskudd hvis inntektene er større enn utgiftene, altså hvis fortjenesten er større enn null. Vi ser av grafen at fortjenesten er større enn null hvis det selges mer enn 120 pølser pr dag.

d) Hvor mange pølser må det selges pr dag hvis årlig fortjeneste skal være over 500 000 kr?

Vi ser av grafen at det må selges mer enn 230 pølser pr dag for at årlig fortjeneste skal være over 500 000 kr.

Eksempel 100: Grafisk fremstilling av sykkeltur

Mia og Anna var på sykkeltur. Mia startet turen kl. 13:30.
Grafene nedenfor viser sykkelturen.



a) Hvor mye var klokka da Anna begynte å sykle?

Mia startet kl. 13:30, og vi ser av grafen at Anna startet 0.5 timer etter dette, altså kl. 14:00.

b) Hvor mange km hadde Mia syklet da hun stoppet for å ta pause?
Vi ser av grafen at Mia tok pause etter å ha syklet 12 km.

c) Hvor lenge hadde Mia pause?

Vi ser av grafen at Mia hadde pause fra 0.5 timer til 0.6 timer, altså hadde hun pause i 0.1 time, som er det samme som $0.1 \cdot 60$ minutter = 6 minutter.

d) Hvor langt hadde de syklet da Anna tok igjen Mia?

Anna tok igjen Mia der grafene krysser hverandre, altså etter 21 km.

e) Hvor mange km per time syklet Anna?

Vi ser av grafen at Anna brukte 1.5 timer – 0.5 timer = 1 time på turen, og at hun syklet 30 km. Farten var da lik $\frac{30\text{ km}}{1\text{ time}}$ = 30 km / time.

f) Hvor mye var klokka da Mia var ferdig med turen?

Vi ser av grafen at Mia var ferdig med turen etter 1.8 timer.
Dette er lik 1 time og 0.8 · 60 minutter, altså 1 time og 48 minutter.

Mia startet turen kl. 13:30.
Etter 1 time var klokka 14:30.
30 minutter senere var den 15:00.
Da hadde Mia igjen 18 minutter av turen.

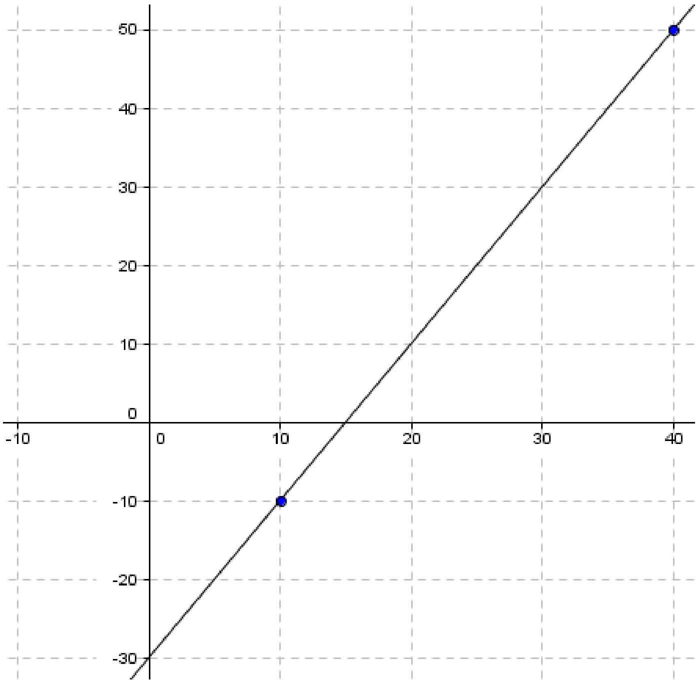
Det betyr at Mia var fremme kl. 15:18.

8.3 Stigningstall og funksjonsuttrykk for rette linjer

Funksjonsuttrykket til en rett linje kan alltid skrives som f(x) = ax + b.
a er stigningstallet og b er verdien til f(x) der grafen skjærer andreaksen, altså når x = 0.

Stigningstallet = $\frac{\text{Forandring til f(x)}}{\text{Forandring til x}}$ (Her velger vi først 2 punkter)

Eksempel 101: Bruk grafen nedenfor til å finne stigningstallet og funksjonsuttrykket til g(x).



Siden grafen er en rett linje vet vi at g(x) = ax + b.
a er stigningstallet og b er verdien til f(x) der grafen skjærer aksen til f(x).

Vi finner først stigningstallet a. Da velger vi først 2 punkter.
Her har vi valgt punktene (10,-10) og (40,50).

Stigningstall = $\frac{\text{Forandring til f(x)}}{\text{Forandring til x}} = \frac{50-(-10)}{40-10} = \frac{60}{30} = 2$

a er altså lik 2.
Vi ser ut fra grafen at b = -30.

Det betyr at g(x) = 2x – 30.

9. Måleenheter

9.1 Lengdeenheter

Eksempel 101: Gjør om 5 m til dm, cm og mm

$$\text{mil} \xrightarrow{10} \text{km} \xrightarrow{1000} \text{m} \xrightarrow{10} \text{dm} \xrightarrow{10} \text{cm} \xrightarrow{10} \text{mm}$$

m → dm 5 m = 5 · 10 dm = 50 dm
m → cm 5 m = 5 · 10 · 10 cm = 5 · 10^2 cm = 500 cm
m → mm 5 m = 5 · 10^3 mm = 5 000 mm

Eksempel 102: Gjør om 0,03 mil til km, m og cm

$$\text{mil} \xrightarrow{10} \text{km} \xrightarrow{1000} \text{m} \xrightarrow{10} \text{dm} \xrightarrow{10} \text{cm} \xrightarrow{10} \text{mm}$$

mil → km 0,03 mil = 0,03 · 10^1 km = 0,3 km
mil → m 0,03 mil = 0,03 · 10 · 1 000 m = 0,03 · 10^4 m = 300 m

mil → cm   0,03 mil = 0,03 · 10 · 1 000 · 10 · 10 cm = 0,03 · 10^6 cm = 30 000 cm

Eksempel 103: Gjør om 20 cm til dm, m og km

$\text{mil} \overset{10}{\text{——}} \text{km} \overset{1000}{\text{——}} \text{m} \overset{10}{\text{——}} \text{dm} \overset{10}{\text{——}} \text{cm} \overset{10}{\text{——}} \text{mm}$

cm → dm 20 cm = 20 : 10 dm = 20 · 10^{-1} dm = 2 dm
cm → m   20 cm = 20 : 10 : 10 m = 20 · 10^{-2} m = 0,2 m
cm → km 20 cm = 20 : 10 : 10 : 1 000 km = 20 · 10^{-5} km = 0,0002 km

9.2 Arealenheter

Eksempel 104: Gjør om 5 m^2 til dm^2, cm^2 og mm^2.

$\text{km}^2 \overset{1000\,000}{\text{——}} \text{m}^2 \overset{100}{\text{——}} \text{dm}^2 \overset{100}{\text{——}} \text{cm}^2 \overset{100}{\text{——}} \text{mm}^2$

m^2 → dm^2 5 m^2 = 5 · 100 dm^2 = 5 · 10^2 dm^2 = 500 dm^2
m^2 → cm^2 5 m^2 = 5 · 100 · 100 cm^2 = 5 · 10^4 cm^2 = 50 000 cm^2
m^2 → mm^2 5 m^2 = 5 · 100 · 100 · 100 mm^2 = 5 · 10^6 mm^2 = 5 000 000 dm^2

Eksempel 105: Gjør om 30 000 mm^2 til cm^2, dm^2 og m^2.

$\text{km}^2 \overset{1000\,000}{\text{——}} \text{m}^2 \overset{100}{\text{——}} \text{dm}^2 \overset{100}{\text{——}} \text{cm}^2 \overset{100}{\text{——}} \text{mm}^2$

mm^2 → cm^2 30 000 mm^2 = 30 000 : 100 cm^2 = 30 000 · 10^{-2} cm^2 = 300 cm^2
mm^2 → dm^2 30 000 mm^2 = 30 000 : 100 : 100 dm^2 = 30 000 · 10^{-4} dm^2 = 3 dm^2
mm^2 → m^2 30 000 mm^2 = 30 000 : 100 : 100 : 100 m^2 = 30 000 · 10^{-6} m^2 = 0,03 m^2

9.3 Volumenheter

Eksempel 106: Gjør om 5 m^3 til dm^3, cm^3 og mm^3.

$\text{m}^3 \overset{1000}{\text{——}} \text{dm}^3 \overset{1000}{\text{——}} \text{cm}^3 \overset{1000}{\text{——}} \text{mm}^3$

m^3 → dm^3 5 m^3 = 5 · 1 000 dm^3 = 5 · 10^3 dm^3 = 5 000 dm^3
m^3 → cm^3 5 m^3 = 5 · 1 000 · 1 000 cm^3 = 5 · 10^6 cm^3 = 5 000 000 cm^3
m^3 → mm^3 5 m^3 = 5 · 1 000 · 1 000 · 1 000 mm^3 = 5 · 10^9 mm^3 = 5 000 000 000 mm^3

Eksempel 107: Gjør om 30 000 mm^3 til cm^3, dm^3 og m^3.

$\text{m}^3 \overset{1000}{\text{——}} \text{dm}^3 \overset{1000}{\text{——}} \text{cm}^3 \overset{1000}{\text{——}} \text{mm}^3$

mm^3 → cm^3 30 000 mm^3 = 30 000 : 1 000 cm^3 = 30 000 · 10^{-3} cm^3 = 30 cm^3
mm^3 → dm^3 30 000 mm^3 = 30 000 : 1 000 : 1 000 dm^3 = 30 000 · 10^{-6} dm^3 = 0,03 dm^3
mm^3 → m^3 30 000 mm^3 = 30 000 : 1 000 : 1 000 : 1 000 m^3 = 30 000 · 10^{-9} m^3
= 0,00003 m^3

Eksempel 108: Gjør om 3 l til dl, cl og ml.

$$l \xrightarrow{10} dl \xrightarrow{10} cl \xrightarrow{10} ml$$

l → dl 3 l = 3 · 10 dl = 30 dl
l → cl 3 l = 3 · 10 · 10 cl = 3 · 10^2 cl = 300 cl
l → ml 3 l = 3 · 10 · 10 · 10 ml = 3 · 10^3 ml = 3 000 ml

Eksempel 109: Gjør om 6 cm^3 til dl, cl og ml.

$$m^3 \xrightarrow{1000} dm^3 \xrightarrow{1000} cm^3 \xrightarrow{1000} mm^3$$
$$\updownarrow$$
$$l \xrightarrow{10} dl \xrightarrow{10} cl \xrightarrow{10} ml$$

cm^3 → dl 6 cm^3 = 6 : 1 000 · 10 dl = 6 · 10^{-3+1} dl = 6 · 10^{-2} dl = 0,06 dl
cm^3 → cl 6 cm^3 = 6 : 1 000 · 10 · 10 cl = 6 · 10^{-1} cl = 0,6 cl
cm^3 → ml 6 cm^3 = 6 : 1 000 dm^3 = 6 : 1 000 l = 6 : 1 000 · 10 · 10 · 10 ml = 6 · 10^0 ml
= 6 ml

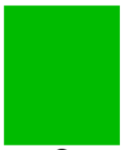
Eksempel 110: Gjør om 50 cl til m^3, dm^3, cm^3 og mm^3.

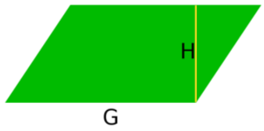
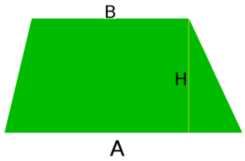
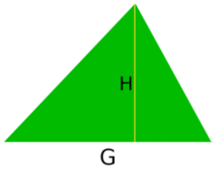
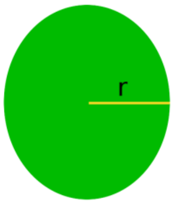
$$m^3 \xrightarrow{1000} dm^3 \xrightarrow{1000} cm^3 \xrightarrow{1000} mm^3$$
$$\updownarrow$$
$$l \xrightarrow{10} dl \xrightarrow{10} cl \xrightarrow{10} ml$$

cl → m^3 50 cl = 50 : 10 : 10 : 1 000 m^3 = 50 · 10^{-5} m^3 = 0,0005 m^3
cl → dm^3 50 cl = 50 : 10 : 10 dm^3 = 50 · 10^{-2} dm^3 = 0,5 dm^3
cl → cm^3 50 cl = 50 : 10 : 10 · 1 000 cm^3 = 50 · 10^{-2+3} cm^3 = 50 · 10^1 cm^3 = 500 cm^3
cl → mm^3 50 cl = 50 : 10 : 10 · 1 000 · 1 000 mm^3 = 50 · 10^{-2+6} mm^3 = 50 · 10^4 mm^3
= 500 000 mm^3

10. Geometri

10.1 Omkrets og areal

			Omkrets	Areal
Kvadrat	Firkant der alle vinklene er 90 grader og alle sidene er like lange.	s  s	4S	S^2
Rektangel	Firkant der alle vinklene er 90 grader.	B  L	2L + 2B	L · B

Parallellogram	Firkant der sidene er parvis parallelle.			$G \cdot H$
Trapes	Firkant der 2 av sidene er parallelle.			$\frac{(A + B) \cdot H}{2}$
Trekant				$\frac{G \cdot H}{2}$
Sirkel			$2 \pi r$	πr^2

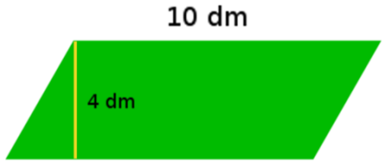
Eksempel 111: Regn ut omkrets og areal til kvadratet.

Figuren er et kvadrat, så alle sidene er like lange. Da blir areal lik 3 dm · 3 dm = 9 dm^2
Omkrets er lik 4 · 3 dm = 12 dm

Eksempel 112: Regn ut omkrets og areal til rektanglet.

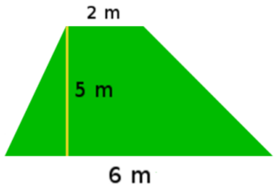
Areal er lik 7 cm · 3 cm = 21 cm^2
Omkrets er lik 2 · 7 cm + 2 · 3 cm = 14 cm + 6 cm = 20 cm

Eksempel 113: Regn ut arealet til parallellogrammet.



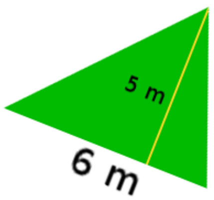
Areal er lik grunnlinje · høyde =
10 dm · 4 dm = 40 dm^2.
Vi kan ikke finne omkrets fordi vi ikke vet hvor lange sidekantene til venstre og høyre er.

Eksempel 114: Regn ut arealet til trapeset.



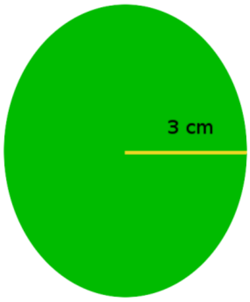
Areal er lik $\frac{(2\text{ m} + 6\text{ m}) \cdot 5\text{ m}}{2} = \frac{8\text{ m} \cdot 5\text{ m}}{2} = \frac{40\text{ m}^2}{2} = 20\text{ m}^2$
Vi kan ikke finne omkrets fordi vi ikke vet hvor lange de skrå sidekantene er.

Eksempel 115 : Regn ut arealet til trekanten.



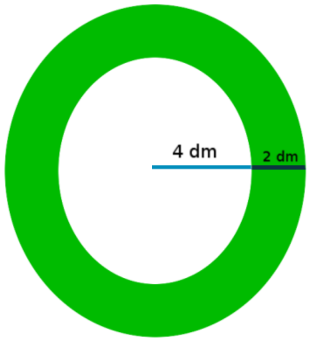
Areal er lik $\frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høyde}}{2} = \frac{6\text{ m} \cdot 5\text{ m}}{2} = \frac{30\text{ m}^2}{2} = 15\text{ m}^2$
Vi kan ikke finne omkrets fordi vi ikke vet lengden på alle sidekantene.

Eksempel 116 : Regn ut omkretsen og arealet til sirkelen.



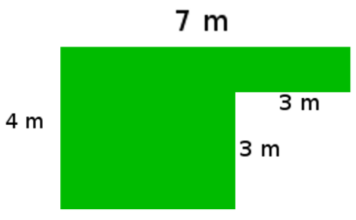
Areal er lik π · r^2 = 3,14 · 3 cm · 3 cm = 28,26 cm^2
Omkrets er lik 2 π r = 2 · 3,14 · 3 cm = 18,84 cm

Eksempel 117 : Regn ut arealet til ringen.

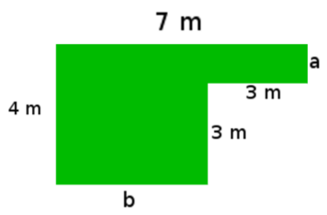


Areal til ringen =
areal til stor sirkel – areal til liten sirkel =
3,14 · 6 dm · 6 dm – 3,14 · 4 dm · 4 dm =
113,04 dm^2 – 50,24 dm^2 =
62,80 dm^2

Eksempel 118: Regn ut arealet og omkretsen til figuren.



Areal til figuren =
4 m · 7 m – 3 m · 3 m =
28 m^2 – 9 m^2 =
19 m^2

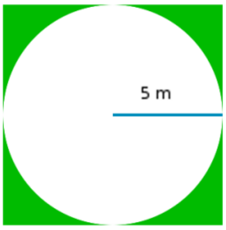


For å finne omkretsen må vi finne lengden til alle sidene.
Det er to sider vi ikke vet lengden til.
Vi kaller disse lengdene a og b.

Vi får at a = 4 m – 3 m = 1 m og at b = 7 m - 3 m = 4 m

Da blir omkretsen lik 7 m + 1 m + 3 m + 3 m + 4 m + 4 m = 22 m

Eksempel 119 : Regn ut arealet til det grønne området.



Arealet av det grønne området =
arealet av firkanten – arealet av den hvite sirkelen inne i firkanten.

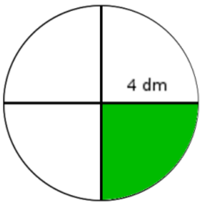
Vi må finne arealet av firkanten og sirkelen.

Vi ser at radius i den hvite sirkelen er 5 m. Da er hver side i firkanten lik 10 m.
Arealet av firkanten er da 10 m · 10 m = 100 m^2.

Arealet av sirkelen er $\pi \cdot r^2$ = 3,14 · 5 m · 5 m = 78,5 m^2

Det betyr at arealet av det grønne området er lik 100 m^2 – 78,5 m^2 = 21,5 m^2.

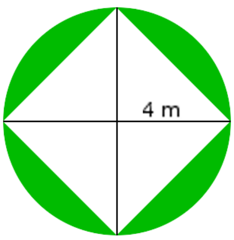
Eksempel 120 : Regn ut arealet og omkretsen til det grønne området.



Vi ser at det grønne området er en firedel av en hel sirkel.
Radiusen i sirkelen er lik 4 dm.
Da er arealet av det grønne området lik $\frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 4\text{ dm} \cdot 4\text{ dm}}{4} = \frac{50{,}24\text{ dm}^2}{4}$ = 12,56 dm^2

Omkretsen av det grønne området er lik 4 dm + 4 dm + $\frac{2\,\pi\,r}{4}$ = 4 dm + 4 dm + $\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4\text{ dm}}{4}$ =
4 dm + 4 dm + 6,28 dm = 14,28 dm

Eksempel 121 : Regn ut arealet til det grønne området.



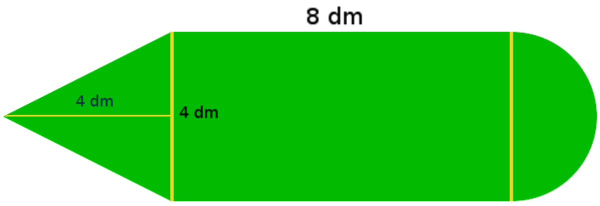
Arealet av det grønne området =
Arealet av sirkelen – arealet av de 4 trekantene inne i sirkelen.

Arealet til sirkelen er lik $\pi \cdot r^2$ = 3,14 · 4 m · 4 m = 50,24 m^2.

Hver trekant har grunnlinje 4 m og høyde 4 m.
Da er arealet av hver trekant lik $\frac{4\text{ m} \cdot 4\text{ m}}{2}$ = 8 m^2.
Arealet til de 4 trekantene er da lik 4 · 8 m^2 = 32 m^2.

Det betyr at arealet til det grønne området er lik 50,24 m^2 – 32 m^2 = 18,24 m^2.

Eksempel 122 : Regn ut arealet til det grønne området.



Det grønne området består av en trekant, et rektangel og en halvsirkel.

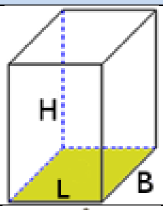
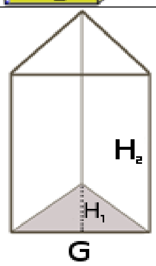
Arealet av trekanten = $\frac{4\text{ dm}\cdot 4\text{ dm}}{2} = \frac{16\text{ dm}^2}{2}$ = 8 dm^2

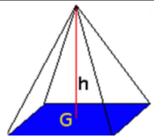
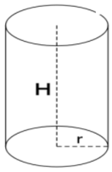
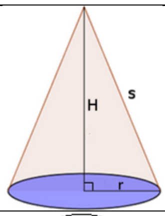
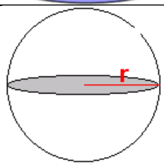
Arealet av rektanglet = 4 dm · 8 dm = 32 dm^2

Arealet av halvsirkelen = $\frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 2\text{ dm}\cdot 2\text{ dm}}{2} = \frac{12{,}56\text{ dm}^2}{2}$ = 6,28 dm^2
(Radiusen til halvsirkelen er lik 2 dm)

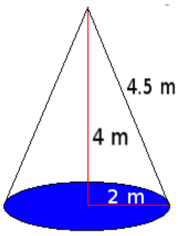
Arealet til det grønne området =
Areal trekant + areal rektangel + areal halvsirkel =
8 dm^2 + 32 dm^2 + 6,28 dm^2 =
46,28 dm^2

10.2 Volum og overflate

		Volum	Overflate
Prisme Grunnflate = rektangel		L = Lengde B = Bredde H = Høyde L · B · H	L = Lengde B = Bredde H = Høyde 2 LB + 2 LH + 2 BH
Prisme Grunnflate = trekant		G = Grunnlinje H_1 = Høyde i trekant H_2 = Høyde til prismet $\frac{G\cdot H1}{2} \cdot H_2$	

Pyramide		G = Grunnflate H = Høyde $\frac{G \cdot H}{3}$	
Sylinder		r = Radius $\pi r^2 \cdot H$	r = Radius H = Høyde $2 \pi r^2 + 2 \pi r H$
Kjegle		r = Radius H = Høyde $\frac{\pi r^2 \cdot H}{3}$	r = Radius s = Sidekant $\pi r^2 + \pi r s$
Kule		r = Radius $\frac{4}{3} \cdot \pi r^3$	r = Radius $4 \pi r^2$

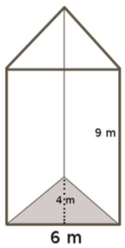
Eksempel 123 : Regn ut volumet og overflaten til figuren.



Figuren er en kjegle, da er volumet V = $\frac{\pi r^2 \cdot H}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 2\text{ m} \cdot 2\text{ m} \cdot 4\text{ m}}{3}$ = 16.75 m^3

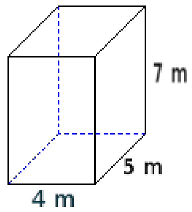
Overflaten O = $\pi r^2 + \pi r s$ = 3.14 · 2 m · 2 m + 3.14 · 2 m · 4.5 m =
12.56 m^2 + 28.26 m^2 = 40.82 m^2

Eksempel 124 : Regn ut volumet til figuren.



Figuren er et prisme med trekant som grunnflate.
Volumet V = G · H = grunnflate · høyde = $\frac{6\text{ m} \cdot 4\text{ m}}{2}$ · 9 m = 108 m^3

Eksempel 125 : Regn ut volumet og overflaten til figuren.

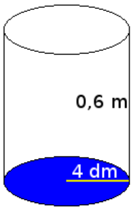


Figuren er et prisme med rektangel som grunnflate.

Volumet V = G · H = grunnflate · høyde = 4 m · 5 m · 7 m = 140 m^3

Overflaten O = 2 · L · B + 2 · L · H + 2 · B · H =
2 · 4 m · 5 m + 2 · 4 m · 7 m + 2 · 5 m · 7 m =
40 m^2 + 56 m^2 + 70 m^2 = 166 m^2

Eksempel 126 : Regn ut volumet og overflaten til figuren.



Figuren er en sylinder.

Det betyr at volumet V = $\pi r^2 \cdot H$ = 3,14 · 4 dm · 4 dm · 0,6 m =
3,14 · 4 dm · 4 dm · 6 dm = 301,44 dm^3

Overflaten O = $2 \pi r^2 + 2 \pi r H$ = 2 · 3,14 · 4 dm · 4 dm + 2 · 3,14 · 4 dm · 6 dm =
100,48 dm^2 + 150,72 dm^2 = 251,20 dm^2

10.3 Målestokk

Alle kart har en målestokk.
Hvis målestokken på kartet er 1 : 5 000 000 betyr det at 1 cm på kartet er 5 000 000 cm i virkeligheten.

Eksempel 127 : På et kart er det 11.8 cm fra Oslo til London.
Kartet har målestokk 1 : 10 000 000.
Hvor mange km er det fra Oslo til London?

Vi regner først ut hvor mange cm det er fra Oslo til London.
1 cm på kartet = 10 000 000 cm, så 11.8 cm på kartet = 11.8 · 10 000 000 cm =
118 000 000 cm.
Det betyr at det er 118 000 000 cm fra Oslo til London.

Vi skal nå regne om fra cm til km.
Vi må da flytte 5 plasser til venstre.
Det betyr at 118 000 000 cm = 1 180 km.
Det er da 1 180 km fra Oslo til London.

Eksempel 128 : En tegning har målestokk 5 : 2.
Mellom to punkter på tegningen er det 20 cm.
Hvor mange cm er det mellom de to punktene i virkeligheten?

5 cm på tegningen = 2 cm, så 1 cm på tegningen = $\frac{2}{5}$ cm.
Det betyr at 20 cm på tegningen = $\frac{2}{5} \cdot 20$ cm = 8 cm
Det er 8 cm mellom de to punktene i virkeligheten.

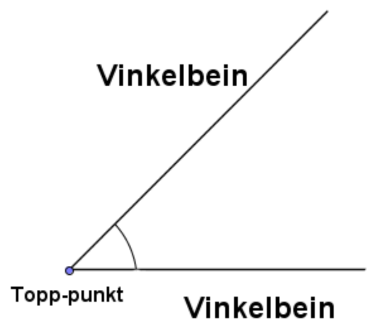
Eksempel 129 : Mellom 2 punkter på et kart er det 5 cm.
Avstanden mellom de to punktene er i virkeligheten 50 km.
Hva er målestokken til kartet?

5 cm på kartet = 50 km.
Det betyr at 5 cm på kartet = 5 000 000 cm.
1 cm på kartet er da lik $\frac{5\,000\,000 \text{ cm}}{5}$ = 1 000 000 cm.
Da er målestokken til kartet 1 : 1 000 000.

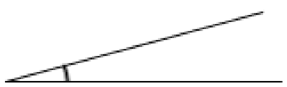
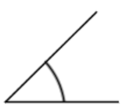
10.4 Konstruksjon og beregning av vinkler

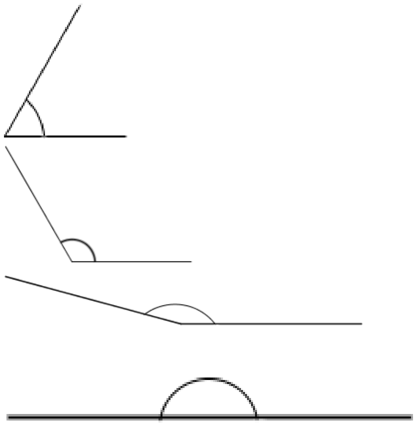
En vinkel består av to linjer som starter i samme punkt.

Linjene kalles **vinkelbein** og punktet kalles **topp-punkt**.

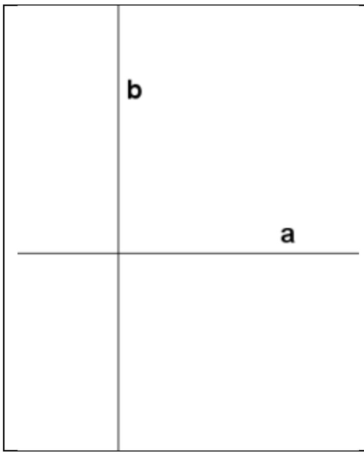


Eksempler på vinkler

	90 graders vinkel, også kalt rett vinkel
	15°
	45°

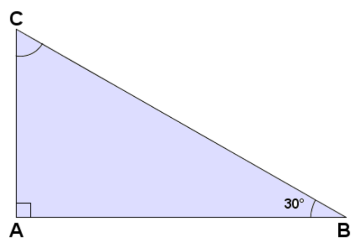


60°
120°
165°
180°

	En linje som står 90 grader (vinkelrett) på en annen linje kalles en **normal** til linja. Linje b står vinkelrett på linje a. Linje b er derfor en normal til a. Linje a står vinkelrett på linje b. Linje a er derfor en normal til b.

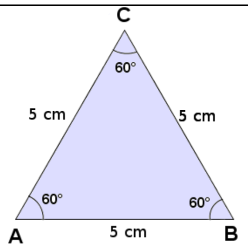
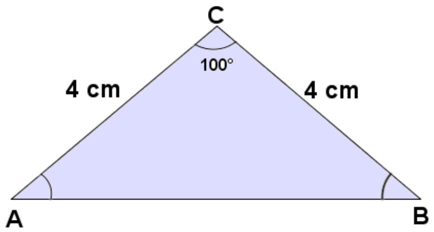
Vinkelsum i trekant: Summen av vinklene i en trekant er alltid lik 180 grader.
Vinkelsum i firkant: Summen av vinklene i en firkant er alltid lik 360 grader.

Eksempel 130 : Regn ut den ukjente vinkelen i trekanten nedenfor.

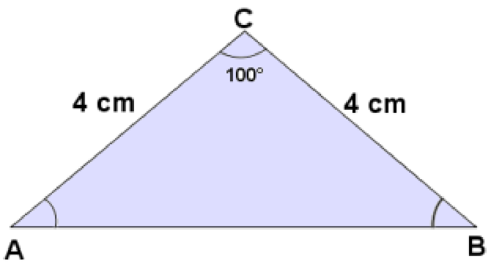


<A + <B + <C = 180°.
Da er <C = 180° – <A - <B = 180° – 90° – 30° = 60°.
Vinkel C er altså lik 60°.

	Likesidet trekant er en trekant	I trekant ABC er AB = BC = AC = 5 cm.

	der alle sidene er like lange. I en likesidet trekant er alle vinklene like store. Det betyr at alle 3 vinklene er lik 60°.	Derfor er trekant ABC likesidet. Da er <A, <B og <C lik 60°.
	**Likebeint** trekant er en trekant der to av sidene er like lange. Når to sider i en trekant er like lange er de motstående vinklene like store.	I trekant ABC er AC = BC = 4 cm. Derfor er trekant ABC likebeint. Da er <B og <A like store.

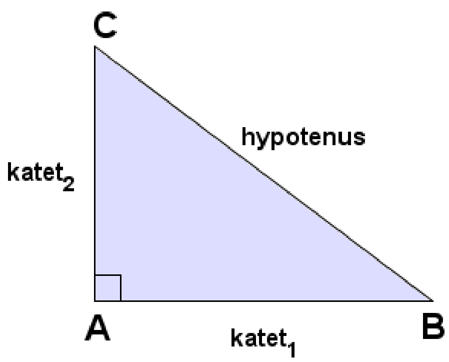
Eksempel 131 : Regn ut de ukjente vinklene i trekanten nedenfor.



Trekanten er likebeint fordi AC = BC = 4 cm.
Da er de motstående vinklene B og A like store.

<A + <B + <C = 180°.
<A + <B = 180° – 100° = 80°.

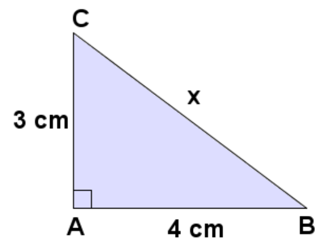
Da er <A og <B lik $\frac{80°}{2}$ = 40°.

	Rettvinklet trekant er en trekant der en av vinklene er rett (90 grader). Den lengste siden i en rettvinklet trekant kalles for hypotenusen, de to andre sidene kalles kateter.	I trekant ABC er vinkel A lik 90 grader. Derfor er trekant ABC rettvinklet.

10.5 Beregning av ukjente sider i trekanter: Pytagoras’ setning og 30-60-90-trekanter

Pytagoras' setning: I en rettvinklet trekant er $\text{hypotenus}^2 = \text{katet}_1^2 + \text{katet}_2^2$

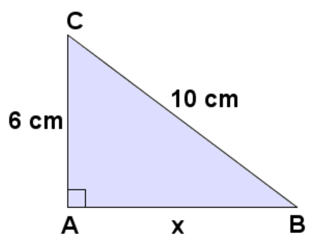
Eksempel 132 : Finn den ukjente siden i trekanten nedenfor.



Vi ser at trekanten er rettvinklet siden <A = 90 grader.
Da kan vi bruke Pytagoras' setning:

$x^2 = 3^2 + 4^2$
$x^2 = 9 + 16$
$x^2 = 25$
Da er $x = \sqrt{25} = 5$
Lengden til den ukjente siden BC i trekanten er altså lik 5 cm.

Eksempel 133 : Finn den ukjente siden i trekanten nedenfor.

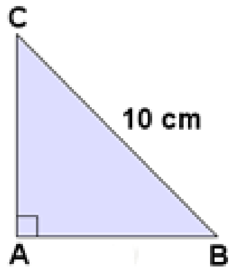


Trekanten er rettvinklet siden <A = 90 grader.
Vi kan derfor bruke Pytagoras' setning:

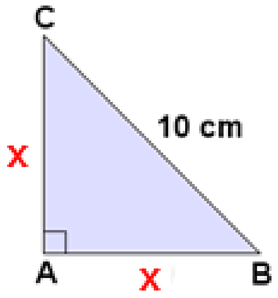
$10^2 = 6^2 + x^2$
$x^2 = 10^2 - 6^2$
$x^2 = 100 - 36$
$x^2 = 64$

Da er $x = \sqrt{64} = 8$
Lengden til den ukjente siden AB i trekanten er altså lik 8 cm.

Eksempel 134 : I trekanten nedenfor er AC = AB (trekanten er likebeint). Finn lengdene til AC og AB.



AC og AB er like lange, og da kan vi si at begge sidene har lengden x.



Trekanten er rettvinklet, så vi bruker Pytagoras' setning:

$10^2 = x^2 + x^2$

$2x^2 = 100$

$x^2 = 50$

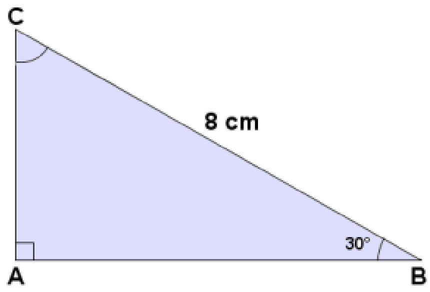
Vi får at $x = \sqrt{50} = 7.1$

Lengden til sidene AC og AB i trekanten er altså lik 7.1 cm.

30-60-90-trekanter

Trekanter der de tre vinklene er lik 30, 60 og 90 grader kalles 30-60-90-trekanter.
I en 30-60-90-trekant er den lengste siden 2 ganger så lang som den korteste siden.
Hvis vi vet lengden til en side i en 30-60-90-trekant, kan vi finne lengdene til de 2 andre sidene.

Eksempel 135 : Finn de ukjente sidene i trekanten nedenfor.

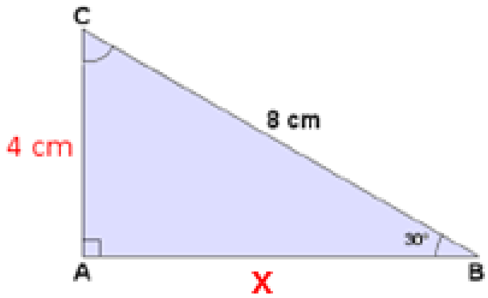


Siden <A = 90° og <B = 30° må <C være lik 60°.
Da er dette en 30-60-90-trekant.

Da er den lengste siden BC 2 ganger så lang som den korteste siden AC.

Det betyr at den korteste siden AC må være lik $\frac{8\text{ cm}}{2}$ = 4 cm.

Vi skal nå finne lengden til siden AB og kaller denne lengden for x.



Siden trekanten er rettvinklet kan vi nå bruke Pytagoras' setning til å finne lengden til siden AB i trekanten.

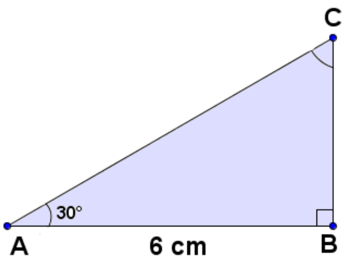
Vi får at $8^2 = 4^2 + x^2$

Da er $x^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$

Det betyr at $x = \sqrt{48} = 6.9$

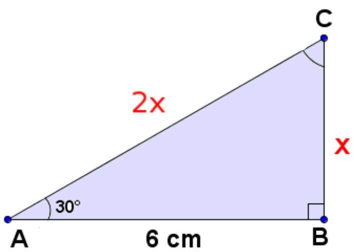
Vi har da funnet at AC = 4 cm og at AB = 6.9 cm.

Eksempel 136 : Finn de ukjente sidene i trekanten nedenfor.



Vinkel C må være lik 60°, så dette er en 30-60-90-trekant.
Da er den lengste siden AC 2 ganger så lang som den korteste siden BC.

Vi kaller lengden til den korteste siden BC for x.
Da må lengden til den lengste siden AC være lik 2x.



Siden trekanten er rettvinklet bruker vi nå Pytagoras' setning for å finne de ukjente sidene i trekanten:

$(2x)^2 = 6^2 + x^2$

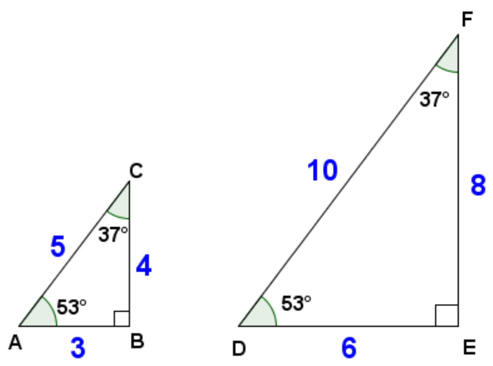
$4x^2 = 6^2 + x^2$

$4x^2 - x^2 = 6^2$
$3x^2 = 36$
$x^2 = 12$
$x = \sqrt{12}$

Da er BC = $\sqrt{12}$ = 3.5 cm og AC = 2 · $\sqrt{12}$ = 6.9 cm.

10.6 Beregning av ukjente sider i trekanter: Formlikhet

To trekanter er formlike hvis de har de samme vinklene.



Vi ser at trekant ABC og DEF har de **samme vinklene**. Derfor er disse trekantene **formlike**.

Sidene AB og DE har den samme motstående vinkelen på 37°.
Da kaller vi **AB og DE** for **samsvarende sider**.

Sidene **BC og EF er samsvarende** fordi de har samme motstående vinkel på 53°.

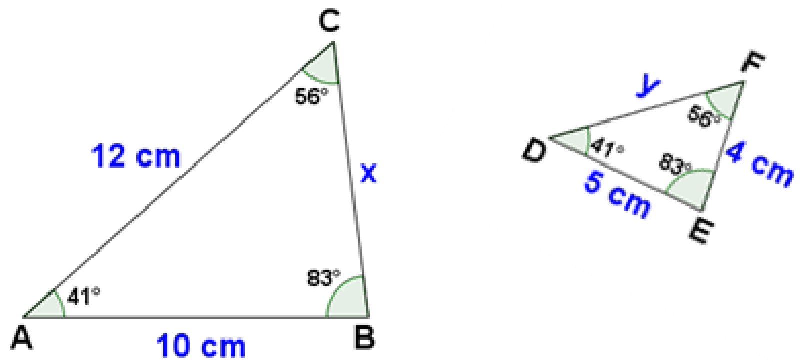
Sidene **AC og DF er samsvarende** fordi de har samme motstående vinkel på 90°.

Vi ser at hver side i trekant DEF er 2 ganger så stor som samsvarende side i trekant ABC.
Vi har at $\frac{DE}{AB} = \frac{6}{3} = 2$, at $\frac{EF}{BC} = \frac{8}{4} = 2$ og at $\frac{DF}{AC} = \frac{10}{5} = 2$.

Derfor er $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$

I formlike trekanter er det altså likt forhold mellom samsvarende sider.
Det kan vi bruke til å finne ukjente lengder av sider i formlike trekanter.

Eksempel 137 : Finn de ukjente sidene i trekantene nedenfor.



Trekant ABC og DEF er formlike siden de har de samme vinklene.

BC og EF er samsvarende sider fordi de har samme motstående vinkel på 41°.
AB og DE er samsvarende sider fordi de har samme motstående vinkel på 56°.

Det betyr at $\frac{x}{4} = \frac{10}{5} = 2$. Vi ganger med 4 på hver side og får at x = 2 · 4 = 8. x er altså lik 8 cm.
Vi har også at $\frac{y}{12} = \frac{5}{10}$. Vi ganger med 12 på hver side og får at y = $\frac{5}{10} \cdot 12 = 6$. y er altså lik 6 cm.

11. Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

11.1 Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

I sannsynlighetsregning beregner vi sannsynligheten for bestemte hendelser.
Vi finner altså sjansen for at forskjellige ting skjer.
Sannsynligheter må alltid være tall mellom 0 og 1, altså mellom 0 % og 100 %.

Eksempel 138: En terning kastes. Finn sannsynligheten for at terningen lander på 5 eller 6.

	Terningen kan lande på 1, 2, 3, 4, 5 eller 6. Det er altså **6 mulige utfall**. 2 av disse utfallene gir 5 eller 6. Sannsynligheten for at terningen lander på 5 eller 6 er da lik $\frac{2}{6}$ Vi skriver da at **P(5 eller 6) =** $\mathbf{\frac{2}{6}}$

Eksempel 139: I en bolle er det 3 gule, 4 grønne og 10 røde kuler.
Finn sannsynligheten for å trekke ut en grønn kule.

Det er 4 grønne kuler.
Totalt er det 3 + 4 + 10 = 17 kuler.
Det er 17 mulige utfall når vi trekker, og 4 av disse utfallene gir en grønn kule.

Vi får da at **P(Grønn kule) =** $\mathbf{\frac{4}{17}}$

Eksempel 140: I en bolle er det 3 gule, 4 grønne og 10 røde kuler.
Finn sannsynligheten for å trekke ut en grønn eller en rød kule.

4 + 10 = 14, så 14 av kulene er grønne eller røde.
Det er 3 + 4 + 10 = 17 kuler totalt.
Det er 17 mulige utfall, og 14 utfall gir grønn eller rød kule.

Det betyr at **P(Grønn eller rød kule) =** $\mathbf{\frac{14}{17}}$

Eksempel 141: I en bolle er det 4 gule, 2 grønne og 3 røde kuler.
Vi trekker ut to kuler.
Finn sannsynligheten for at den første kula er grønn og den andre er rød.

Først finner vi sannsynligheten for at den første kula vi trekker er grønn.

	Det er 2 grønne kuler i bollen. Til sammen er det 4 + 2 + 3 = 9 kuler. Sannsynligheten for at den første kula er grønn er da lik $\frac{2}{9}$

Så finner vi sannsynligheten for at den andre kula vi trekker er rød.

	Den første kula vi trakk var grønn. Denne kula er nå borte. Det er nå til sammen 4 + 1 + 3 = 8 kuler igjen. 3 av disse 8 kulene er røde. Sannsynligheten for at den andre kula er rød er da lik $\frac{3}{8}$

Sannsynligheten for at den første kula er grønn og den andre rød er da lik $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{72}$

Vi skriver da at **P(Første kule er grønn og andre rød) =** $\mathbf{\frac{6}{72}}$

Eksempel 142: I en bolle er det 6 blå, 2 hvite og 5 grønne kuler.
Vi trekker ut tre kuler. Finn sannsynligheten for at alle tre kulene er blå.

P(Første kule er blå) = $\frac{6}{13}$ siden det er 13 kuler til sammen og 6 av dem er blå.

P(Andre kule er blå) = $\frac{5}{12}$ siden det nå er 12 kuler igjen og 5 av dem er blå.

P(Tredje kule er blå) = $\frac{4}{11}$ siden det nå er 11 kuler igjen og 4 av dem er blå.

Det betyr at **P(Alle tre kulene er blå) =** $\mathbf{\frac{6}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{120}{1716}}$ **= 0.07**

Eksempel 143: To terninger kastes. Finn sannsynligheten for at begge terningene viser 3.

Sannsynligheten for at den første terningen viser 3 er lik $\frac{1}{6}$

Sannsynligheten for at den andre terningen viser 3 er også lik $\frac{1}{6}$

Det betyr at P (Begge terningene viser 3) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Eksempel 144: To terninger kastes. Finn sannsynligheten for at ingen av terningene viser 3.

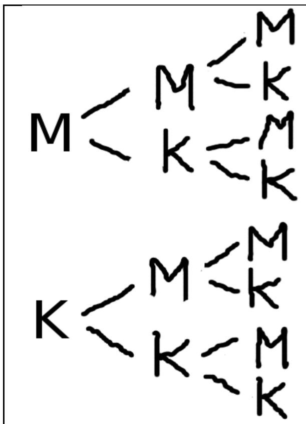
Sannsynligheten for at den første terningen ikke viser 3 er lik $\frac{5}{6}$

Sannsynligheten for at den andre terningen ikke viser 3 er også lik $\frac{5}{6}$

Det betyr at P (Ingen av terningene viser 3) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

Eksempel 145: Vi kaster en mynt 3 ganger.
Finn sannsynligheten for at 2 av kastene gir kron og 1 av kastene gir mynt.

Vi kaller kron for K og mynt for M.
Vi tegner et diagram for å få oversikt over alle de mulige utfallene ved 3 myntkast:



Ut fra diagrammet kan vi se at de 8 mulige utfallene av 3 kast er:

MMM, MMK, MKM, MKK, KMM, KMK, KKM, KKK

Vi ser at det er 3 av de 8 utfallene som gir 2 K og 1 M.

Det betyr at P (2 K og 1 M) = $\frac{3}{8}$

Eksempel 146: Vi kaster to terninger. Hva er sannsynligheten for at summen av terningkastene blir lik 10?

Vi lager her en tabell for å få oversikt over alle de mulige utfallene.
Så skriver vi opp summen for hvert utfall.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Vi ser at det er 3 utfall som gir 10 i sum:

Første terning er 4 og andre terning er 6
Første terning er 5 og andre terning er 5
Første terning er 6 og andre terning er 4

Til sammen er det 36 utfall.

Det betyr at P(Sum av 2 terningkast er lik 10) = $\frac{3}{36}$

Eksempel 147: Et fotballag får følgende valg for draktene sine:
Genser: Blå, grønn, gul eller rød
Bukse: Hvit, svart eller grå
Hvor mange mulige drakter kan laget velge mellom?

Det er 4 mulige valg av genser. For hvert mulig valg av genser er det 3 mulige valg av bukse.
Da blir det 4 · 3 = 12 mulige kombinasjoner av genser og bukse.

Eksempel 148: 4 personer skal fordeles i et styre. I styret skal det være en formann, en nestleder, en kasserer og en sekretær. Hvor mange måter kan styret settes sammen av de 4 personene?

Det er 4 muligheter for hvem som kan være formann.
Når formannen er valgt har vi bare 3 muligheter igjen for hvem som kan være nestleder.
Når nestlederen er valgt har vi 2 muligheter igjen for hvem som kan være kasserer.
Når kassereren også er valgt er det bare 1 mulighet igjen for hvem som kan være sekretær.

Antall muligheter å sette sammen styret er da lik 4 · 3 · 2 · 1 = 24.

12. Prosent

12.1 Regne ut en gitt prosent av et tall

Eksempel 149: Ei bok kostet før 500 kr men ble satt ned med 20 %.
Hva er den nye prisen på boka?

Boka ble satt ned med 20 % av 500 kr. Dette er lik $\frac{20}{100}$ · 500 kr = 100 kr.

Ny pris på boka blir da 500 kr – 100 kr = 400 kr.

12.2 Finne hvor mange prosent et tall er av et annet tall

Eksempel 150: I en by med 40 000 innbyggere er 14 000 over 50 år.
Regn ut hvor mange prosent av innbyggerne som er over 50 år.

Antall prosent som er over 50 år er lik $\frac{14\,000}{40\,000}$ · 100 % = 35 %

Eksempel 151: På en matematikkprøve ble det følgende resultater:

Karakter	Antall elever
6	1
5	3

4	6
3	10
2	4
1	1

Hvor mange prosent av elevene fikk karakteren 4 eller bedre?

6 elever fikk 4, 3 elever fikk 5 og 1 elev fikk 6.
Altså var det 6 + 3 + 1 = 10 elever som fikk karakteren 4 eller bedre.
Det var til sammen 1 + 3 + 6 + 10 + 4 + 1 = 25 elever som hadde prøven.
Antall prosent som fikk karakteren 4 eller bedre er da $\frac{10}{25} \cdot 100\ \% = 40\ \%$.

12.3 Finne forskjell i prosent fra ett tall til et annet tall

Eksempel 152: En sykkel kostet før 2 500 kr men koster nå 3 500 kr.
Regn ut hvor mange prosent sykkelen har gått opp i pris.

Her skal vi finne forskjell i prosent fra 2 500 kr til 3 500 kr.
Dette er lik $\frac{3\,500-2\,500}{2\,500} \cdot 100\ \% = 40\ \%$.

Eksempel 153: 1 kg druer koster 25 kr på Maxi og 20 kr på Mega.
Regn ut hvor mange prosent billigere druene er på Mega.

Her skal vi finne forskjell i pris **fra Maxi (25 kr) til Mega (20 kr)**.
Det betyr at **$tall_1$ = 25 og $tall_2$ = 20**.
Forskjellen i % er da lik $\frac{20-25}{25} \cdot 100\ \% = -20\ \%$.
Druene er altså 20 % billigere på Mega.

Eksempel 154: Regn ut hvor mange prosent dyrere druene er på Maxi.

Her skal vi finne forskjell i pris **fra Mega (20 kr) til Maxi (25 kr)**.
Det betyr at **$tall_1$ = 20 og $tall_2$ = 25**.
Forskjellen i % er da lik $\frac{25-20}{20} \cdot 100\ \% = 25\ \%$.
Druene er altså 25 % dyrere på Maxi.

12.4 Finne gammel pris når vi vet ny pris og forandring i prosent

Eksempel 155: En PC blir satt ned 30 % i pris og koster nå 5 600 kr. Hva kostet PC-en før?

5 600 kr = 70 % av den gamle prisen fordi 100 % - 30 % = 70 %.
Vi skal finne den gamle prisen.
Vi deler med 70 og får at 1 % av gammel pris = $\frac{5\,600\text{ kr}}{70}$.
Så ganger vi med 100 og får at gammel pris var $100 \cdot \frac{5\,600\text{ kr}}{70} = 8\,000$ kr.

Eksempel 156: Jon fikk 20 % mer i timelønn når han fylte 18 år. Han tjener nå 138 kr pr time.

Hvor mye tjente han pr time før han fylte 18 år?

138 kr = 120 % av gammel timelønn fordi 100 % + 20 % = 120 %.
Vi skal finne gammel timelønn.

$\frac{138\text{ kr}}{120}$ = 1 % av gammel timelønn.

Da er gammel timelønn lik 100 · $\frac{138\text{ kr}}{120}$ = 115 kr.

Jon tjente 115 kr pr time før han fylte 18 år.

13. Renter, vekstfaktor og lån

13.1 Renter

Renter er forandring i en kapital (pengebeløp) i løpet av en bestemt tid.

Hvis vi setter inn 1 000 kr i en bank og får 3 % rente pr år betyr det at vi får
1 000 kr · 3 % = 1 000 kr · $\frac{3}{100}$ = 30 kr i renter fra banken.

Da har vi 1 000 kr + 30 kr = 1 030 kr i banken etter 1 år.

Eksempel 157: Jan setter inn 10 000 kr i banken og får 3 % rente pr år.
Hvor mye får han i renter det første året?

Renter første år er lik 10 000 kr · $\frac{3}{100}$ = 300 kr.
Svar: Jan får 300 kr i renter det første året.

Vi kan regne ut rente for et antall måneder eller dager hvis vi vet rente pr år.
Følgende formler gjelder:

Renter etter et antall måneder = Startkapital · $\frac{\text{Prosent rente pr år}}{100} \cdot \frac{\text{Antall måneder}}{12}$

Renter etter et antall dager = Startkapital · $\frac{\text{Prosent rente pr år}}{100} \cdot \frac{\text{Antall dager}}{365}$

Eksempel 158: Jan setter inn 10 000 kr i banken og får 3 % rente pr år.
Hvor mye får han i renter på 5 måneder?

Vi bruker formelen for måneder ovenfor.
Renter etter 5 måneder er lik 10 000 kr · $\frac{3}{100} \cdot \frac{5}{12}$ = 125 kr.
Svar: Jan får 125 kr i renter på 5 måneder.

Eksempel 159: Amanuel setter inn 20 000 kr i banken og får 4 % rente pr år.
Hvor mye får han i renter på 80 dager?

Vi bruker formelen for dager ovenfor.

Renter etter 80 dager er lik 20 000 kr · $\frac{4}{100} \cdot \frac{80}{365}$ = 175,34 kr.

Svar: Jan får 175,34 kr i renter på 80 dager.

Hvis Jan tok ut alle pengene sine etter disse 80 dagene ville han fått utbetalt
20 000 kr + 175,34 kr = 20 175,34 kr.

Eksempel 160: Klara setter inn 15 000 kr i banken helt i begynnelsen av året og får 3 % rente pr år.
Etter 8 måneder setter hun inn 5 000 kr til.
Hvor mye får hun i rente det første året?

De 15 000 kr hun satte inn først får hun renter av for hele året, altså 15 000 kr · $\frac{3}{100}$

De 5 000 kr hun satte inn etter 8 måneder får hun bare renter av for de 4 siste månedene i året, altså 5 000 kr · $\frac{3}{100} \cdot \frac{4}{12}$

Renter første året er da lik 15 000 kr · $\frac{3}{100}$ + 5 000 kr · $\frac{3}{100} \cdot \frac{4}{12}$ = 450 kr + 50 kr = 500 kr

Svar: Klara får 500 kr i renter det første året.

13.2 Vekstfaktor

Vekstfaktor er et tall som viser hvordan en verdi eller et pengebeløp forandrer seg.

Vekstfaktor = 1 + $\frac{\text{Forandring i prosent}}{100}$

Hvis vi setter 1 000 kr i banken og får 4 % rente pr år kan vi beregne vekstfaktor for pengene vi har på kontoen.

4 % rente betyr at kontoen vår forandrer seg med 4 % pr år.

Da er vekstfaktor = 1 + 4 % = 1 + $\frac{4}{100}$ = 1 + 0,04 = 1,04.

Eksempel 161: Per får 7 % rente på pengene han har i en bank. Finn vekstfaktoren.

Forandringen på kontoen er 7 % pr år.

Da er vekstfaktor = 1 + 7 % = 1 + $\frac{7}{100}$ = 1 + 0,07 = 1,07.

Svar: Vekstfaktor = 1,07.

Eksempel 162: Verdien til bilen til Thomas går ned med 10 % for hvert år som går.
Finn vekstfaktoren for bilens verdi.

Forandringen i bilens verdi er her lik -10% siden bilen går **ned** i verdi med 10 %.

Da er vekstfaktor = 1 – 10 % = 1 - 0,10 = 0,90.

Svar: Vekstfaktor = 0,90.

Når forandringen er negativ blir vekstfaktoren mindre enn 1.
Når forandringen er positiv blir vekstfaktoren større enn 1.

Vi kan bruke vekstfaktor til å regne ut størrelsen på en verdi eller kapital (pengebeløp) som forandrer seg likt hvert år.

Følgende formel gjelder: Verdi etter et antall år = Startverdi · Vekstfaktor$^{\text{Antall år}}$

Vekstfaktoren må være lik for hvert år hvis vi skal kunne bruke formelen.

Eksempel 163: Willy setter 20 000 kr i banken og får 4 % rente pr år.
Hvor mye har han på konto etter 3 år?

Vi bruker formelen ovenfor, og må da finne startverdi og vekstfaktor.

Startverdi er lik 20 000 kr.
Vekstfaktor er lik 1 + 4 % = 1 + 0,04 = 1,04.

Da er verdi etter 3 år = 20 000 kr · $1{,}04^3$ = 20 000 kr · 1,04 · 1,04 · 1,04 = 22 497,28 kr.

Eksempel 164: Sara eier en båt som går ned i verdi med 15 % pr år.
Båten har i dag en verdi på 120 000 kr.
Hva er verdien til båten om 2 år?

Startverdi = 120 000 kr.
Vekstfaktor = 1 – 15 % = 1 – 0,15 = 0,85.

Båtens verdi etter 2 år = 120 000 kr · $0{,}85^2$ = 120 000 kr · 0,85 · 0,85 = 86 700 kr.

13.3 Serielån

Avdrag = Antall kr lånet blir mindre når vi betaler.
Et **serielån** er et lån der avdragene er like store hvert år.

Nedbetalingstid er lik antall år det tar å betale ned lånet.

I et serielån er Avdrag = $\frac{\text{Startlån}}{\text{Nedbetalingstid}}$

Eksempel 165: Vi tar opp et serielån på 20 000 kr til 5 % rente pr år.
Nedbetalingstiden er 10 år.
Hvor stort blir hvert avdrag, og hvor mye må vi betale inn de 5 første årene?

Avdrag = $\frac{20\ 000\ \text{kr}}{10}$ = 2 000 kr.

År	Prosent rente	Lån	Avdrag	Renter	Innbetaling
1	5	20 000 kr	2 000 kr	1 000 kr	3 000 kr
2	5	18 000 kr	2 000 kr	900 kr	2 900 kr
3	5	16 000 kr	2 000 kr	800 kr	2 800 kr
4	5	14 000 kr	2 000 kr	700 kr	2 700 kr
5	5	12 000 kr	2 000 kr	600 kr	2 600 kr

14. Omregning

14.1 Omregning mellom vektenheter, tidsenheter og lengdeenheter

Eksempel 166:
Per løper 2 km på 12 minutter.
Hvor langt løper han på 18 minutter?

Vi skal frem til 18 minutter.
Vi vet: Per løper 2 km på 12 minutter. **Vi må regne om fra 12 minutter til 18 minutter.**

Vi deler med 12 for å gå fra 12 minutter til 1 minutt:

Per løper $\frac{2}{12}$ km på 1 minutt.

Så ganger vi med 18 for å gå fra 1 minutt til 18 minutter:

Per løper 18 · $\frac{2}{12}$ km på 18 minutter.

Vi regner ut og får at Per løper 3 km på 18 minutter.

Eksempel 167:
Per løper 2 km på 12 minutter.
Hvor mange minutter bruker han på å løpe 7 km?

Vi skal frem til 7 km.
Vi vet: Per løper 2 km på 12 minutter. **Vi må regne om fra 2 km til 7 km.**

Vi deler med 2 for å gå fra 2 km til 1 km:

Per løper 1 km på $\frac{12}{2}$ minutter.

Så ganger vi med 7 for å gå fra 1 km til 7 km:

Per løper 7 km på $7 \cdot \frac{12}{2}$ minutter.

Vi regner ut og får at Per løper 7 km på 42 minutter.

Eksempel 168: Tom løper med en fart på 15 km pr time. Hvor mange meter løper han på 30 sekunder?

Her må vi først regne om fra km og timer til meter og sekunder.

1 time = 60 minutter = 60 · 60 sekunder = 3 600 sekunder.
15 km = 15 000 meter.

Det betyr at Tom løper **15 000 meter på 3 600 sekunder**.

Vi skal nå regne om fra 3 600 sekunder til 30 sekunder.

Vi deler med 3 600 for å gå fra 3 600 sekunder til 1 sekund:

Tom løper $\frac{15\,000 \text{ meter}}{3\,600}$ på 1 sekund.

Så ganger vi med 30 for å gå fra 1 sekund til 30 sekunder:

Tom løper $30 \cdot \frac{15\,000 \text{ meter}}{3\,600}$ på 30 sekunder.

Vi regner ut og får at Tom løper 125 meter på 30 sekunder.

Eksempel 169: 400 gram kjøttdeig koster 30 kr. Hvor mye koster kjøttdeigen pr kg?

Vi må regne om fra gram til kg. Da deler vi med 1000.

400 gram = $\frac{400}{1000}$ kg = 0.4 kg.

Det betyr at 0.4 kg koster 30 kr.

1 kg koster da $\frac{30 \text{ kr}}{0.4}$

Vi regner ut og får at kjøttdeigen koster 75 kr pr kg.

14.2 Omregning mellom valutaer

Eksempel 170: 1 Euro = 7,36 norske kroner (NOK). Hvor mange NOK er 500 Euro?

500 Euro = 500 · 7,36 NOK = 3 680 NOK.

Eksempel 171: 1 Euro = 7,36 norske kroner (NOK). Hvor mange Euro er 500 NOK?

7,36 NOK = 1 Euro.
Vi skal frem til 500 NOK.
Vi deler først med 7.36, deretter ganger vi med 500.

1 NOK = $\frac{1 \text{ Euro}}{7.36}$

500 NOK = $\frac{1 \text{ Euro}}{7.36} \cdot 500$ = 67.93 Euro.

Eksempel 172: 1 Euro = 7.36 NOK og 1 USD (amerikansk dollar) = 5.64 NOK.
Regn om fra 500 Euro til USD.

Vi skal regne om fra 500 Euro til USD.
Vi går først fra Euro til NOK, deretter går vi videre fra NOK til USD.

500 Euro = 500 · 7.36 NOK = 3 680 NOK

1 NOK = $\frac{1 \text{ USD}}{5.64}$

Det betyr at 3 680 NOK = 3 680 $\cdot \frac{1 \text{ USD}}{5.64}$ = 652.48 USD

500 Euro er altså lik 652.48 USD.

15. Statistikk

15.1 Gjennomsnitt, median, variasjonsbredde og typetall

Når vi gjør en undersøkelse samler vi ofte inn tall som vi analyserer.
Tallene vi samler inn kaller vi for **data** eller **observasjoner**.

Både gjennomsnitt, median og typetall forteller noe om hvilke data som er ”vanlige”.
Variasjonsbredden forteller hvor mye dataene varierer.

Eksempel 173: I en by ble temperaturen målt kl 0800 8 dager på rad. Resultatene var:

-5	2	-9	-3	-4	-5	-1	1

Finn gjennomsnitt, median, variasjonsbredde og typetallet til målingene (observasjonene / dataene).

Gjennomsnittet av dataene finner vi ved å legge sammen dataene og deretter dele på antall data.

Gjennomsnitt = $\frac{-9-5+2-3-4-5-1+1}{8} = \frac{-24}{8} =$ -3

For å finne medianen sorterer vi først dataene / observasjonene i stigende rekkefølge.

Da får vi denne tabellen:

-9	-5	-5	-4	-3	-1	1	2

Medianen er lik den midterste av disse sorterte observasjonene, men her er det ingen observasjon som ligger helt i midten. Da tar vi gjennomsnittet av de 2 midterste, som er lik $\frac{-4-3}{2} = \frac{-7}{2} = -3.5$

Typetallet er den observasjonen som forekommer flest ganger.
Her ser vi at -5 finnes 2 ganger mens de andre observasjonene bare forekommer 1 gang.
Det betyr at typetall = -5

Hvis det ikke er noen tall som forekommer oftere enn de andre tallene finnes det ikke noe typetall.

Variasjonsbredden er lik forskjellen mellom den største og den minste observasjonen.
Det betyr at variasjonsbredden er lik største observasjon minus minste observasjon.
Variasjonsbredden er da lik 2 – (-9) = 2 + 9 = 11.

Eksempel 174: 5 personer ble spurt hvor mye de tjener på 1 år. Det ga disse dataene:

440 000	370 000	15 300 000	490 000	410 000

Finn gjennomsnitt, median, variasjonsbredde og typetallet til målingene (observasjonene / dataene).

Gjennomsnitt = $\frac{440\ 000+370\ 000+15\ 300\ 000+490\ 000+410\ 000}{5}$ = 3 402 000

Median: Vi sorterer dataene i stigende rekkefølge.

370 000	410 000	440 000	490 000	15 300 000

Den midterste av de sorterte observasjonene er 440 000, så medianen er lik 440 000

Det finnes ikke noe typetall her fordi det ikke er noen tallverdi som forekommer flest ganger.

Variasjonsbredde = Største data - minste data = 15 300 000 – 370 000 = 14 930 000

Vi ser at gjennomsnittet på 3 402 000 kr ikke gir noe godt bilde av hvilken lønn som er vanlig.
Medianen på 440 000 kr er bedre å bruke i dette tilfellet.
Når noen få data er veldig mye større enn de andre dataene vil medianen være bedre å bruke enn gjennomsnittet.

Eksempel 175: En norskprøve ga disse resultatene:

Karakter	Antall
6	1
5	4
4	6
3	11
2	3
1	0

Finn gjennomsnitt, median, variasjonsbredde og typetallet til målingene (observasjonene / dataene).

Antall karakterer = 1 + 4 + 6 + 11 + 3 + 0 = 25
Summen av karakterene = 1 · 6 + 4 · 5 + 6 · 4 + 11 · 3 + 3 · 2 + 0 · 1 = 6 + 20 + 24 + 33 + 6 + 0 = 89

Gjennomsnitt = $\frac{89}{25}$ = 3.56

$\frac{25+1}{2}$ = 13, så medianen er lik tall nr 13 sortert nedenfra. De 3 første tallene nedenfra er 2-ere, og de 11 neste er 3-ere. Da må tall nr 13 nedenfra være en 3-er. Det betyr at medianen = 3.

Variasjonsbredde = høyeste karakter – laveste karakter = 6 – 2 = 4.

Typetall = den karakteren som forekommer flest ganger = 3.

15.2 Stolpediagram, histogram og linjediagram

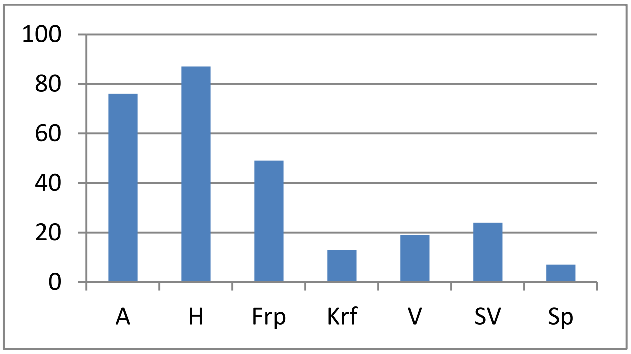
Stolpediagram

Et skolevalg ga følgende resultater:

Eksempel 176: Et skolevalg ga disse resultatene:

Parti	Antall
A	76
H	87
Frp	49
Krf	13
V	19
SV	24
Sp	7

Lag et stolpediagram (søylediagram) som viser fordelingen av stemmene for de ulike partiene.



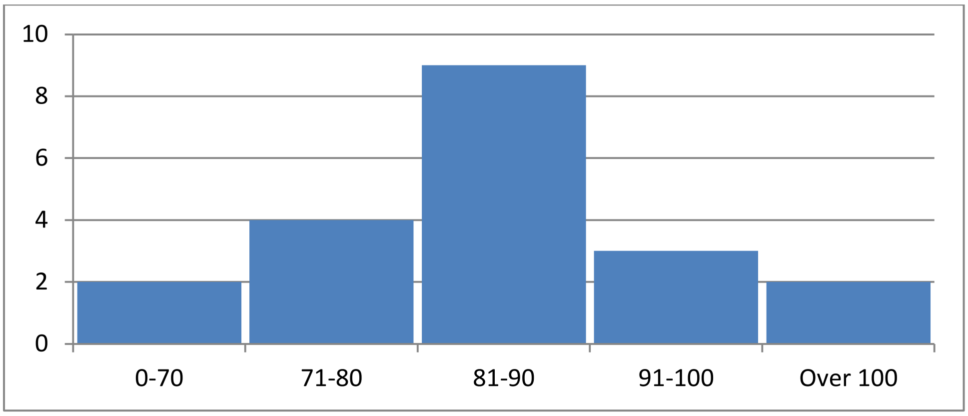
Histogram brukes når vi har veldig mange ulike data.

Eksempel 177: En fartskontroll ga disse resultatene målt i km/t:

75	89	83	64	99	124	81	74	82	79
96	104	72	93	83	85	83	70	90	85

Lag et histogram med klassebredde 10 som viser resultatene.

Her har vi mange forskjellige data, derfor bruker vi histogram.
Da samler vi dataene i grupper og teller opp antall data i hver gruppe.
Gruppe 1 er 0-70, gruppe 2 er 71-80, gruppe 3 er 81-90, gruppe 4 er 91-100 og gruppe 5 er Over 100.
Vi setter stolpene omtrent helt inntil hverandre i et histogram.

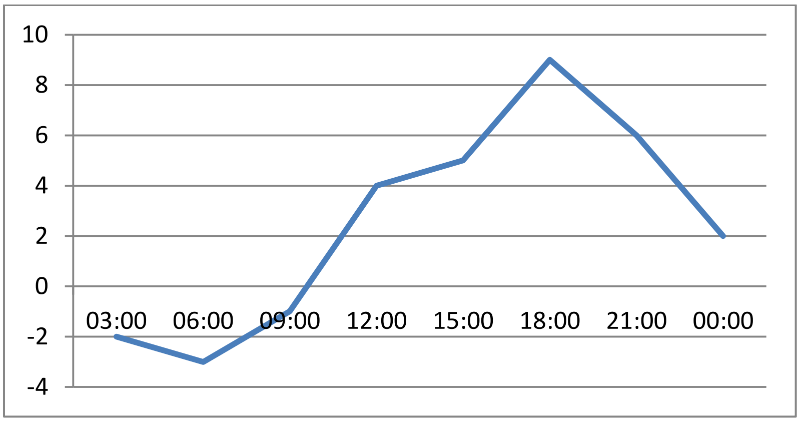


Linjediagram brukes for å vise utviklingen til dataene i løpet av en tidsperiode.

Eksempel 178: En by hadde disse temperaturene i løpet av et døgn:

Kl. 03	Kl. 06	Kl. 09	Kl. 12	Kl. 15	Kl. 18	Kl. 21	Kl. 24
-2	-3	-1	4	5	9	6	2

Lag et linjediagram som viser utviklingen i temperaturene.



16. Oddetall, partall og primtall

16.1 Oddetall, partall og primtall

Et partall er et positivt tall som er delelig med 2.
Partallene er 2, 4, 6, 8, 10 og så videre.

Et oddetall er et positivt tall som ikke er delelig med 2.
Oddetallene er 1, 3, 5, 7, 9 og så videre.

Et primtall er et tall som **ikke** kan deles opp i mindre faktorer.
5 er et primtall fordi 5 ikke kan deles opp i mindre faktorer.
Men 6 er ikke et primtall fordi 6 kan deles opp (6 er lik $2 \cdot 3$).

Eksempel 179: Skriv opp alle primtall mellom 20 og 40.

Primtallene mellom 20 og 40 er 23, 29, 31 og 37.

Eksempel 180: Lag en tabell som viser om disse tallene er partall, oddetall eller primtall.
6, 11, 18, 19, 55

	Oddetall	Partall	Primtall	
2	Nei	Ja	Ja	
11	Ja	Nei	Ja	
18	Nei	Ja	Nei	$3 \cdot 6$
19	Ja	Nei	Ja	
55	Ja	Nei	Nei	$5 \cdot 11$

17. De fire regneartene (Addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon)

17.1 Addisjon

Eksempel 181: Regn ut 118.64 + 87.7

	1	1	1			
	1	1	5	.	6	4
+		8	7	.	7	
=	2	0	3	.	3	4

Det er viktig å få med tallene i rødt!

17.2 Subtraksjon

Eksempel 182: Regn ut 118.64 - 87.7

		10	14			
	0	0	4		16	
	1	1	5	.	6	4
-		8	7	.	7	
=		2	7	.	9	4

17.3 Multiplikasjon

Eksempel 183: Regn ut 61.7 · 9.58

$61.7 \cdot 9.58$

1 2

			4	9	3	6
		3	0	8	5	
+	5	5	5	3		
=	5	9	1.	0	8	6

Det blir til sammen 3 desimaler i svaret.

17.4 Divisjon

Eksempel 184: Regn ut 270 : 0.04

0.04 har 2 desimaler. Vi skriver 270 som 270.00 slik at dette tallet også har 2 desimaler.
270 : 0.04 = 270.00 : 0.04

Nå har begge tall like mange desimaler, da kan vi ta bort kommaene.
(Gjelder bare divisjon!)

270.00 : 0.04 = 27000 : 004 = **27 000 : 4**

2	7	0	0	0	:	4	=	6	7	5	0
2	4										
	3	0									
	2	8									
		2	0								
		2	0								
			0	0							
				0							
				0							

Vi får altså at 270 : 0.04 = 6750.